

ШАМАНАЕВ П. А., ГОЛОВАТЮК А. М.

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНОГО
УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА**

Аннотация. В статье описан результат по автоматизации в математическом пакете Maple метода малого параметра для нахождения периодического решения неавтономного уравнения Дуффинга. Построены графики периодических решений и фазовые траектории уравнения Дуффинга при различных значениях малого параметра.

Ключевые слова: уравнение Дуффинга, периодические решения, резонанс, метод малого параметра, Maple.

SHAMANAEV P. A., GOLOVATYUK A. M.

**CALCULATING PERIODIC SOLUTIONS TO NON-AUTONOMOUS
DUFFING EQUATION BY SMALL PARAMETER METHOD**

Abstract. The article presents the result of automating the small parameter method in the Maple mathematical package for finding a periodic solution to the non-autonomous Duffing equation. Graphs of periodic solutions and phase trajectories of the Duffing equation are constructed for various values of a small parameter.

Keywords: Duffing equation, periodic solutions, resonance, small parameter method, Maple.

Введение. В 1918 году Г. Дуффинг ввел в рассмотрение уравнение с кубической нелинейностью для описания эффекта жесткости пружины [1]. В дальнейшем такого вида уравнения получили название уравнение Дуффинга. В работах [2; 3] изложены различные подходы к нахождению периодических решений неавтономного уравнения Дуффинга.

Одним из хорошо известных методов нахождения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений является метод малого параметра, предложенный А. Пуанкаре [4] и получивший свое развитие в последующих работах [5; 6].

В приведенных работах при вычислении периодического решения методом малого параметра, как правило, ограничиваются вычислениями первого или второго приближения в разложении искомого решения в ряд по малому параметру. В предлагаемой работе на основе автоматизации в математическом пакете Maple процесса нахождения приближений 2π -периодического решения неавтономного уравнения Дуффинга приведены результаты по вычислению приближений до третьего порядка включительно. Разработанный программный модуль в пакете Maple позволяет по наперед заданному произвольному числу приближений найти эти приближения.

Вычисление периодического решения неавтономного уравнения Дуффинга вдали

от резонанса. Рассмотрим уравнение Дуффинга в виде [5]

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \lambda \sin t + \gamma \mu x^3, \quad (1)$$

где собственная частота ω – отличное от нечетного целого вещественное число, μ – малый параметр, λ и γ – некоторые вещественные параметры. Уравнение (1) будем называть возмущенным уравнением для случая вдали от резонанса.

Приведем результат работы программного модуля для $n = 3$, реализующего алгоритм вычисления методом малого параметра 2π -периодического решения неавтономного уравнения Дуффинга при условии, что значение собственной частоты находится вдали от резонансных значений.

Представим периодическое решение уравнения (1) в виде

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + o(\mu^3). \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра μ в левой и правой частях и пренебрегая слагаемыми порядка $o(\mu^3)$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= \lambda \sin t, & \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \gamma x_0^3, \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= 3\gamma x_0^2 x_1, & \ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 &= 3\gamma x_0^2 x_2 + 3\gamma x_0 x_1^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Последовательно решая уравнения системы (3) в пакете Maple, получим

$$\begin{aligned} x_0(t) &= A_1 \sin t, & x_1(t) &= B_1 \sin t + B_3 \sin 3t, \\ x_2(t) &= C_1 \sin t + C_3 \sin 3t + C_5 \sin 5t, & x_3(t) &= D_1 \sin t + D_3 \sin 3t + \\ & & & + D_5 \sin 5t + D_7 \sin 7t, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$A_1 = \frac{\lambda}{\omega^2 - 1}, \quad B_1 = \frac{3\gamma\lambda^3}{4(\omega^2 - 1)^4}, \quad B_3 = -\frac{\gamma\lambda^3}{4(\omega^2 - 1)^3(\omega^2 - 9)},$$

$$C_1 = \frac{3\gamma^2\lambda^5(5\omega^2 - 41)}{8(\omega^2 - 1)^7(\omega^2 - 9)}, \quad C_3 = -\frac{3\gamma^2\lambda^5(5\omega^2 - 29)}{16(\omega^2 - 1)^6(\omega^2 - 9)^2},$$

$$C_5 = \frac{3\gamma^2\lambda^5}{16(\omega^2 - 1)^5(\omega^2 - 9)(\omega^2 - 25)},$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{3\gamma^3\lambda^7(35\omega^4 - 550\omega^2 + 2243)}{16(\omega^2 - 1)^{10}(\omega^2 - 9)^2}, \quad D_3 \\ &= -\frac{9\gamma^3\lambda^7(7\omega^6 - 255\omega^4 + 2361\omega^2 - 6721)}{16(\omega^2 - 1)^{10}(\omega^2 - 9)^2(\omega^2 - 25)}, \end{aligned}$$

$$D_5 = \frac{3\gamma^3\lambda^7(7\omega^4 - 188\omega^2 + 901)}{16(\omega^2 - 1)^8(\omega^2 - 9)^2(\omega^2 - 25)^2},$$

$$D_7 = -\frac{3\gamma^3\lambda^7(\omega^2 - 13)}{16(\omega^2 - 1)^7(\omega^2 - 9)^2(\omega^2 - 25)(\omega^2 - 49)}.$$

Первое уравнение системы (3) будем называть невозмущенным уравнением для случая вдали от резонанса.

В качестве приближения порядка $o(\mu^3)$ к 2π -периодическому решению уравнения (1) возьмем

$$S_3(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t), \quad (5)$$

Приближения фазовых траекторий уравнения (1) будем строить как параметрические кривые $r(t) = (S_3(t), \dot{S}_3(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Графики периодических решений и фазовые траектории уравнения Дуффинга вдали от резонанса. Поскольку в этом параграфе рассматривается не резонансный случай, то в качестве собственной частоты выберем, например, $\omega = 2$.

Приведем графики 2π -периодических решений и фазовых траекторий уравнения (1) при $\lambda = 1$ и $\gamma = 6$ и различных значениях параметра μ (рис. 1, 2).

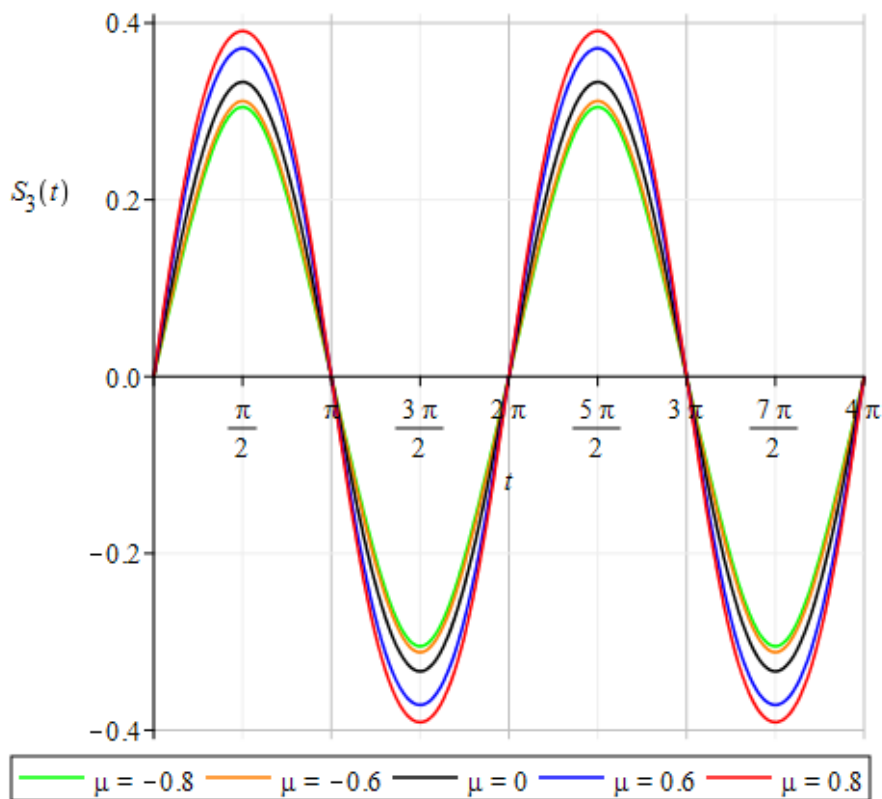


Рис. 1. Графики 2π - периодических решений уравнения (1) в случае отсутствия резонанса при различных значениях параметра μ .

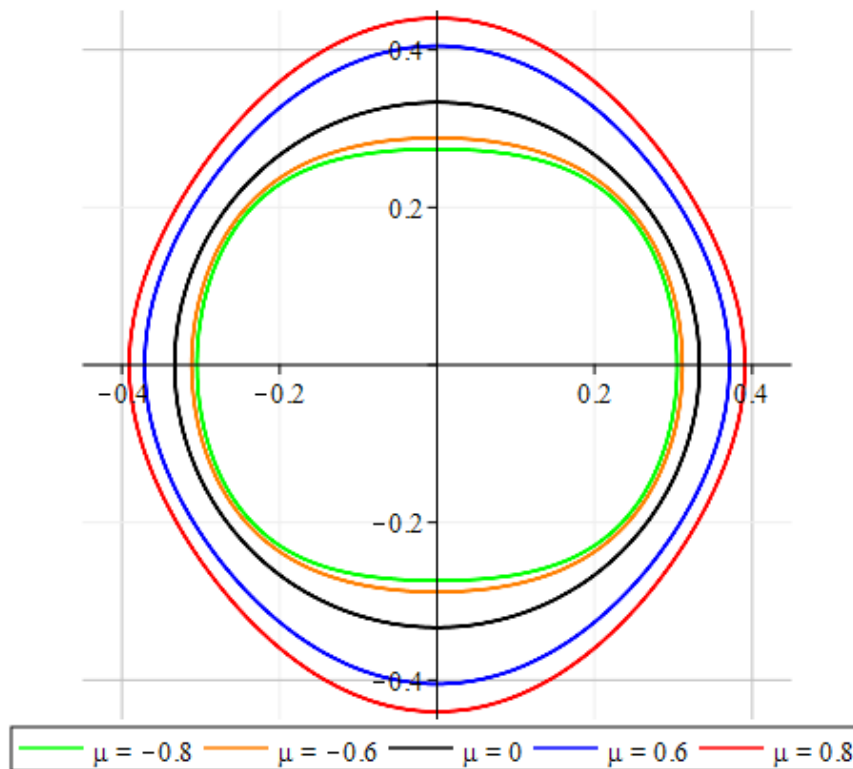


Рис. 2. Графики фазовых траекторий уравнения (1) в случае отсутствия резонанса при различных значениях параметра μ .

Вычисление периодического решения неавтономного уравнения Дуффинга при резонансе. Рассмотрим случай, когда собственная частота ω равна единице или меньше ее на некоторый малый параметр. Тогда согласно [5] представим собственную частоту ω в виде

$$\omega^2 = 1 + b\mu, \quad (6)$$

и рассмотрим два случая:

- 1) резонанс: $\omega^2 = 1, b = 0$;
- 2) вблизи резонанса: $\omega^2 = 1 + \mu, b = 1, \mu < 0$.

Тогда в первом случае уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x} + x = \mu(\gamma x^3 + \lambda_1 \sin t), \quad (7)$$

во втором случае получим

$$\ddot{x} + x = \mu(-x + \gamma x^3 + \lambda_1 \sin t). \quad (8)$$

Здесь, $\lambda = \mu \lambda_1$. Уравнения (7) и (8) будем называть возмущенным уравнением для случаев 1 и 2, соответственно. Уравнение

$$\ddot{z} + z = 0,$$

– невозмущенным уравнением для случаев 1 и 2, соответственно.

В виду громоздкости формул, выражающих аналитическую зависимость приближений периодических решений от параметров γ и λ_1 , приведем результаты работы программного модуля для приближенного вычисления 2π -периодических решений с точностью $o(\mu^3)$ при значениях $\gamma = 6$ и $\lambda_1 = 1$ для случаев 1) $\omega^2 = 1$, $b = 0$

$$S_3(t) = -0,6057 \sin t + \mu(-0,1389 \cdot 10^{-1} \sin t - 0,4166 \cdot 10^{-1} \sin 3t) + \\ + \mu^2(0,6372 \cdot 10^{-2} \sin t + 0,1434 \cdot 10^{-1} \sin 3t - 0,2866 \cdot 10^{-2} \sin 5t) + \\ + \mu^3(-0,2679 \cdot 10^{-2} \sin t - 0,4470 \cdot 10^{-2} \sin 3t + 0,1447 \cdot 10^{-2} \sin 5t - \\ - 0,1971 \cdot 10^{-3} \sin 7t), \quad (9)$$

и случая 2) $\omega^2 = 1 + \mu$, $b = 1$, $\mu < 0$

$$S_3(t) = -0,7265 \sin t + \mu(-0,2789 \cdot 10^{-1} \sin t - 0,7189 \cdot 10^{-1} \sin 3t) + \\ + \mu^2(0,1448 \cdot 10^{-1} \sin t + 0,2542 \cdot 10^{-1} \sin 3t - 0,7117 \cdot 10^{-2} \sin 5t) + \\ + \mu^3(-0,6310 \cdot 10^{-2} \sin t - 0,6766 \cdot 10^{-2} \sin 3t + 0,3783 \cdot 10^{-2} \sin 5t - \\ - 0,7042 \cdot 10^{-3} \sin 7t). \quad (10)$$

Погрешность вычислений составляет 10^{-4} .

Графики периодических решений и фазовых траекторий уравнения Дуффинга при резонансе. Построим графики 2π -периодических решений и фазовых траекторий уравнения (1) для случаев 1) $\omega^2 = 1$, $b = 0$ (рис. 3, 4) и 2) $\omega^2 = 1 + \mu$, $b = 1$, $\mu < 0$ (рис. 5, 6) при различных значениях параметра μ .

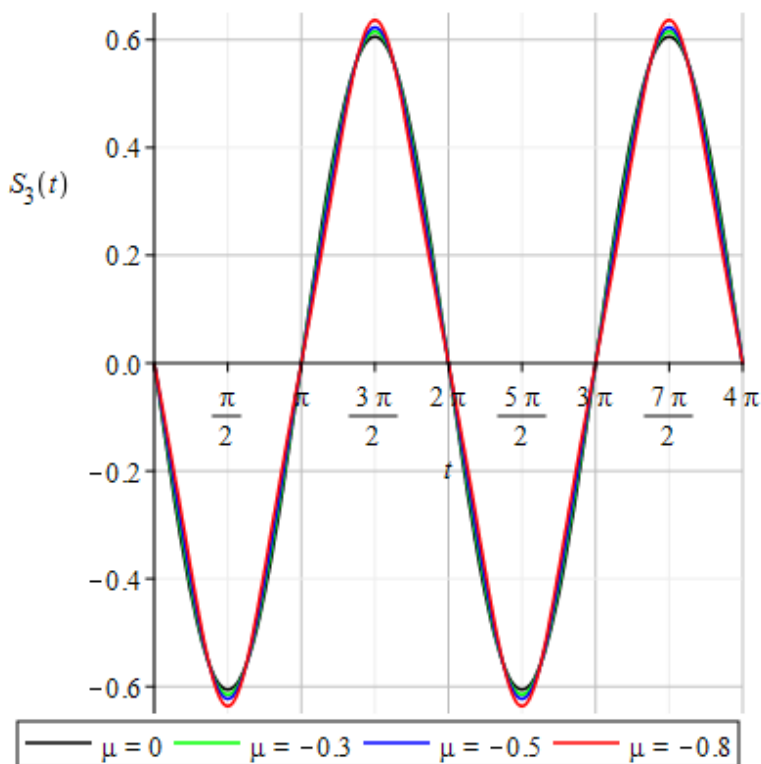


Рис. 3. Графики 2π - периодическому решению уравнения (7) в случае резонанса при $\omega^2 = 1$ и различных значениях параметра μ .

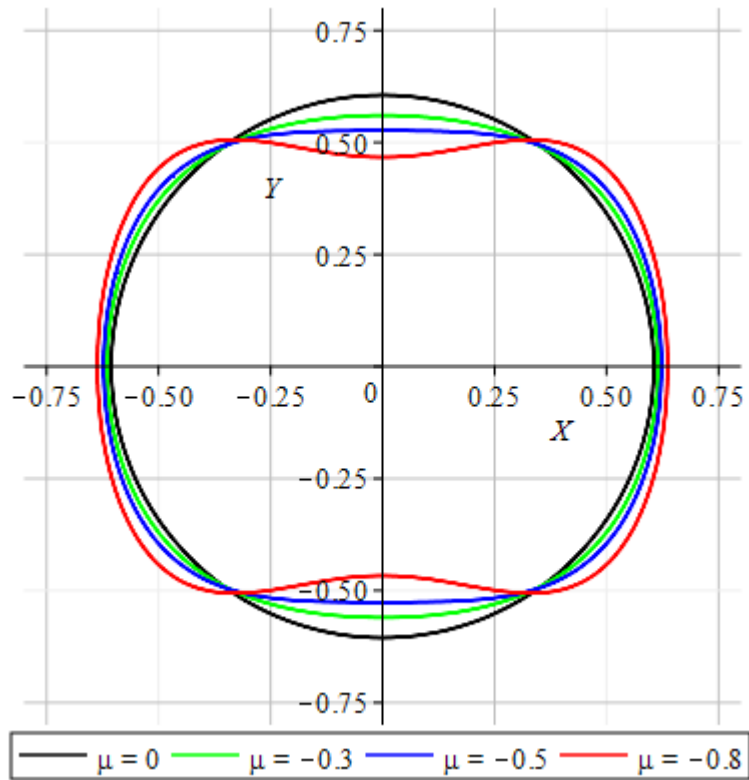


Рис. 4. Графики фазовых траекторий уравнения (7) в случае резонанса при $\omega^2 = 1$ и при различных значениях параметра μ .

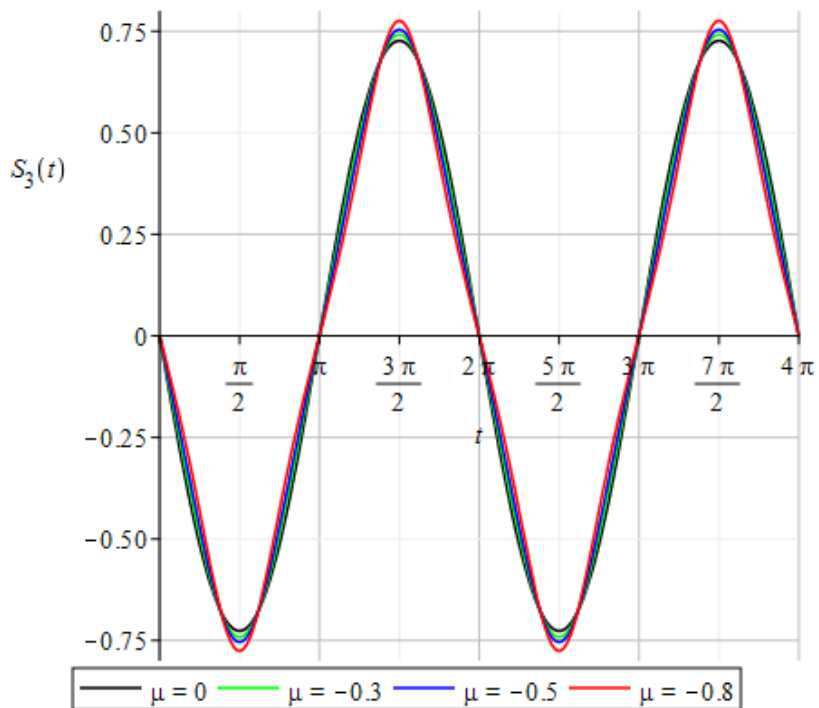


Рис. 5. Графики 2π - периодическому решению уравнения (7) вблизи резонанса при $\omega^2 = 1 + \mu$ и различных значениях параметра μ .

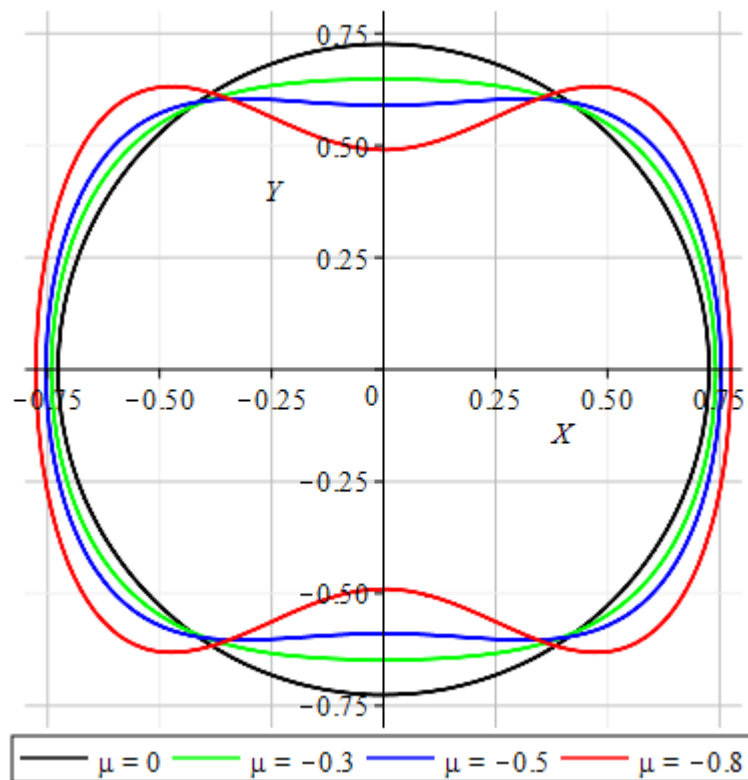


Рис. 6. Графики фазовых траекторий уравнения (7) вблизи резонанса при $\omega^2 = 1 + \mu$ и при различных значениях параметра μ .

Обсуждение полученных результатов. Достоверность результатов, полученных с помощью метода малых параметров, подтверждается сравнением их с численными решениями задачи Коши для соответствующих уравнений (1), (7) и (8). Начальные данные численных решений определялись из приближенных решений, полученных методом малого параметра.

Из графиков (рис. 1–6) видно, что случаи вдали резонанса и вблизи него имеют общую закономерность, заключающуюся в том, что при уменьшении параметра μ по модулю 2π -периодические решения и фазовые траектории возмущенных уравнений приближаются к 2π -периодическим решениям и фазовым траекториям соответствующих невозмущенных уравнений. Причем вдали резонанса амплитуда колебания 2π -периодических решений при положительных μ больше, чем при отрицательных.

Вместе с тем есть и существенные различия. Если в случае вдали от резонанса фазовые траектории представляют собой непересекающееся семейство замкнутых кривых, то в случае резонанса каждая фазовая траектория возмущенной системы пересекает фазовую траекторию невозмущенной системы в четырех точках. Причем в случае резонанса ($\omega^2 = 1, b = 0$) эти четыре точки пересечения для всех фазовых траекторий возмущенной системы остаются

неизменными, вблизи же резонанса ($\omega^2 = 1 + \mu$, $b = 1$, $\mu < 0$) соответствующие точки пересечения для различных фазовых траекторий возмущенной системы несколько смещаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duffing G., *Erzwungene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*. – Braunschweig: Sammlung Vieweg, 1918. – 134 s.
2. Стокер Дж. *Нелинейные колебания в механических и электрических системах*. – М.: Издательство иностранной литературы, 1952. – 103 с.
3. Хаяси Т. *Нелинейные колебания в физических системах*. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
4. Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики. Избр. труды: Т. 1.* – М.: Наука, 1971. – 772 с.
5. Малкин И. Г. *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*. – М.: Наука, 1956. – 492 с.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний*. – М.: Гос. изд-во физико-мат. лит., 1959. – 916 с.