

РАССАДИН А. Э.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА  
С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

**Аннотация.** В работе построен оператор  $C_0$ -полугруппы, инфинитезимальный генератор которой является линейной комбинацией оператора диффузии-теплопроводности и оператора пространственной инверсии на прямой. Обсуждены общие свойства эволюции функций, задающих начальные условия, под действием такого оператора. Показано, что эти свойства резко отличаются от свойств решений одномерного параболического уравнения на прямой за счёт наличия по сути дискретного элемента в генераторе рассматриваемой полугруппы.

**Ключевые слова:** коммутатор, проектор, пространство Лебега, гиперболические функции, преобразование Лапласа, интегральное ядро оператора, резольвента.

RASSADIN A. E.

EXACT SOLUTION TO ONE FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION  
OF PARABOLIC TYPE USING SEMIGROUP THEORY  
AND SOME OF ITS APPLICATIONS

**Abstract.** In this paper, the  $C_0$ -semigroup operator is constructed, the infinitesimal generator of which is a linear combination of the diffusion-thermal conductivity operator and the spatial inversion operator on a straight line. The general properties of the evolution of functions defining initial conditions under the action of such an operator are discussed. It is shown that these properties differ sharply from the properties of solutions to a one-dimensional parabolic equation on a straight line due to the presence of an essentially discrete element in the generator of the semigroup under consideration.

**Keywords:** commutator, projector, Lebesgue space, hyperbolic functions, Laplace transform, integral operator kernel, resolvent.

Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа активно используются при решении целого ряда задач оптоэлектроники [1] и математической биологии [2]. Многие общие свойства уравнений такого типа описаны в обзоре [3]. Однако в математической физике важную роль играют не только свойства решений её уравнений, но и построение точных решений этих последних, поэтому рассмотрим задачу Коши на прямой:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \alpha \cdot u(-x,t), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad \alpha \neq 0. \quad (1)$$

Для этой задачи справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $u_0 \in L_\infty(R)$ , тогда точное решение задачи Коши (1) имеет вид:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi;t) \cdot u_0(\xi) \cdot d\xi, \quad (2)$$

где интегральное ядро оператора эволюции равно

$$g(x,\xi;t) = ch(\alpha \cdot t) \cdot G(x - \xi;t) + sh(\alpha \cdot t) \cdot G(x + \xi;t), \quad (3)$$

а

$$G(x;t) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot t}\right). \quad (4)$$

**Доказательство.** Перепишем задачу Коши (1) для исходного функционально-дифференциального уравнения параболического типа в операторном виде:

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u_0, \quad (5)$$

где

$$A = D^2 + \alpha \cdot P \quad (6)$$

— линейный оператор, действие которого на произвольную функцию  $f(x)$  можно определить с помощью следующих правил:  $(Df)(x) = f'(x)$  (оператор дифференцирования) и  $(Pf)(x) = f(-x)$ .

Как хорошо известно [4], решение абстрактной задачи Коши (5) равно:

$$u(t) = \exp(At)u_0. \quad (7)$$

Далее, входящий в формулу (6) оператор  $P$  есть не что иное, как широко используемый в квантовой механике оператор пространственной инверсии [5].

Этот оператор коммутирует с квадратом оператора дифференцирования  $D$ :  $[D^2, P] = 0$ , следовательно:

$$\exp[(D^2 + \alpha P) \cdot t] = \exp(\alpha \cdot t \cdot P) \cdot \exp(t \cdot D^2). \quad (8)$$

Легко убедиться в том, что в пространстве  $L_\infty(R)$  оператор инверсии  $P$  ограничен, причём  $\|P\| = 1$ , поэтому:

$$\exp(\alpha \cdot t \cdot P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n t^n}{n!} \cdot P^n. \quad (9)$$

Но так как  $P^2 = I$ , где  $I$  — тождественный оператор [5], то формула (9) упрощается:

$$\exp(\alpha \cdot t \cdot P) = ch(\alpha \cdot t) \cdot I + sh(\alpha \cdot t) \cdot P. \quad (10)$$

Наконец,  $\{\exp(t \cdot D^2)\}_{t \geq 0}$  — оператор полугруппы Гаусса-Вейерштрасса, действие которого на произвольную функцию  $f \in L_\infty(R)$  задаётся её свёрткой с функцией (4) [6]:

$$(\exp(t \cdot D^2) \cdot f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi; t) \cdot f(\xi) \cdot d\xi. \quad (11)$$

Комбинируя формулы (7), (8), (10) и (11), придём к выражениям (2) и (3), то есть к условию теоремы.

Теорема полностью доказана.

Интегрируя соотношение (2) по  $x$  по всей прямой и переставляя затем порядки интегрирования по  $x$  и по  $\xi$ , получим следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Если  $u(x, t)$  — точное решение задачи Коши (1) с начальным условием  $u_0 \in L_1(R)$ , то:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) \cdot dx = \exp(\alpha \cdot t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \cdot dx. \quad (12)$$

Соотношение (12) демонстрирует разницу между поведением решений обычного уравнения параболического типа ( $\alpha = 0$ ) и функционально-дифференциального уравнения параболического типа ( $\alpha \neq 0$ ), а именно, площадь, ограниченная решением уравнения (1) и осью  $x$ , со временем либо экспоненциально растёт (при  $\alpha > 0$ ), либо экспоненциально убывает (при  $\alpha < 0$ ) — в отличие от площади, ограниченной решением уравнения диффузии-теплопроводности ( $\alpha = 0$ ), которая не меняется со временем.

Переходя в формуле (10) от гиперболических функций к экспоненциальным и используя затем формулу (8), легко вывести ещё одно следствие из доказанной выше теоремы.

**Следствие 2.** *Оператор полугруппы, соответствующий инфинитезимальному генератору полугруппы (6), можно представить в виде:*

$$\exp(At) = [\exp(\alpha \cdot t) \cdot P_+ + \exp(-\alpha \cdot t) \cdot P_-] \cdot \exp(t \cdot D^2), \quad (13)$$

где  $P_\pm = (I \pm P)/2$  — операторы, удовлетворяющие соотношениям  $P_\pm^2 = P_\pm$ , то есть проекционные операторы.

Это представление эволюционного оператора задачи Коши (1) позволяет лучше понять общую структуру её точного решения (2), а именно, действуя согласно формуле (7) на начальное условие  $u_0(x)$  оператором полугруппы в представлении (13), получим, что:

$$u(x, t) = \exp(\alpha \cdot t) \cdot u^+(x, t) + \exp(-\alpha \cdot t) \cdot u^-(x, t), \quad (14)$$

где  $u^\pm(x,t) = (u^0(x,t) \pm u^0(-x,t))/2$  — соответственно чётная и нечётная части от функции  $u^0(x,t) = (\exp(t \cdot D^2)u_0)(x)$ , являющейся решением обычного уравнения теплопроводности с тем же начальным условием  $u_0(x)$ . Таким образом, из выражения (14) следует, что на больших временах при  $\alpha > 0$  остаётся и экспоненциально растёт чётная часть  $u^+(x,t)$  от функции  $u^0(x,t)$ , а при  $\alpha < 0$  остаётся и экспоненциально растёт нечётная часть  $u^-(x,t)$  от функции  $u^0(x,t)$ .

Важной характеристикой инфинитезимального генератора (6) рассматриваемой полугруппы является его резольвента  $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$  [4, 6].

Пусть функция  $r(x, \xi; \lambda)$  — интегральное ядро оператора резольвенты. Оно действует на произвольный вектор  $f \in L_\infty(R)$  следующим образом:

$$(R_\lambda(A)f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(x, \xi; \lambda) \cdot f(\xi) \cdot d\xi. \quad (15)$$

Применив к выражениям (2)-(4) формулу связи между оператором резольвенты и оператором полугруппы [4, 6]:

$$(R_\lambda(A)f)(x) = - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda \cdot t) \cdot (\exp(At)f)(x) \cdot dt \quad (16)$$

и сравнив между собой выражения (15) и (16) после использования известных свойств преобразования Лапласа [7] и известного выражения интегрального ядра для резольвенты  $R_\lambda(D^2)$  оператора  $D^2$  [6], несложно получить ещё одно утверждение.

**Следствие 3.** *Интегральное ядро оператора резольвенты инфинитезимального генератора полугруппы (6) равно:*

$$r(x, \xi; \lambda) = \frac{\rho(x, \xi; \lambda - \alpha) + \rho(x, -\xi; \lambda - \alpha) + \rho(x, \xi; \lambda + \alpha) - \rho(x, -\xi; \lambda + \alpha)}{2}, \quad (17)$$

где  $\rho(x, \xi; \lambda) = -\exp(-\sqrt{\lambda} \cdot |x - \xi|) / (2 \cdot \sqrt{\lambda})$  — интегральное ядро резольвенты  $R_\lambda(D^2)$ .

С другой стороны, подстановка представления (13) оператора рассматриваемой полугруппы в формулу (16) позволяет переписать выражение для резольвенты в операторном виде:

$$R_\lambda(D^2 + \alpha \cdot P) = P_+ \cdot R_{\lambda - \alpha}(D^2) + P_- \cdot R_{\lambda + \alpha}(D^2). \quad (18)$$

Очевидно, что формулы (17) и (18) эквивалентны друг другу.

Рассмотрим пример точного решения задачи Коши (1). Выберем её начальное условие в виде гауссоиды с характерной шириной  $l_0$ , сдвинутой относительно начала координат на расстояние  $x_0$ :

$$u_0(x) = \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4 \cdot l_0^2}\right]. \quad (19)$$

Оператор полугруппы Гаусса-Вейерштрасса  $(\exp(D^2 t))_{t \geq 0}$  трансформирует во времени функцию (19) следующим образом:

$$u^0(x,t) = \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + t}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(x-x_0)^2}{l_0^2 + t}\right]. \quad (20)$$

Наконец, из функции (20) по формуле (14) получаем точное решение задачи Коши (1) с начальным условием (19):

$$u(x,t) = \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + t}} \cdot \left( ch(\alpha t) \cdot \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(x-x_0)^2}{l_0^2 + t}\right] + sh(\alpha t) \cdot \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(x+x_0)^2}{l_0^2 + t}\right] \right). \quad (21)$$

Графики функции (21) при  $x_0 = 2$ ,  $l_0 = 1$  и различных значениях  $\alpha$  приведены на рис. 1 и 2.

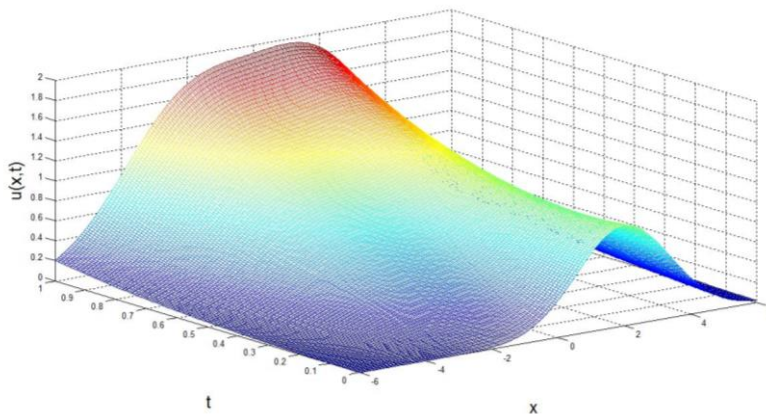


Рис. 1. Временная эволюция смещённой гауссоиды при  $\alpha = 1,5$ .

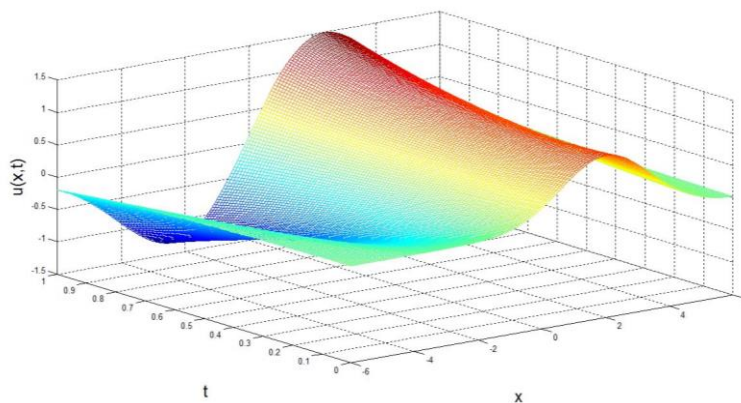


Рис. 2. Временная эволюция смещённой гауссоиды при  $\alpha = -1,5$ .

Из рисунка 1 видно, что на больших временах экспоненциально растёт чётная часть гауссоиды (20). Из рисунка 2 видно, что на больших временах экспоненциально растёт её нечётная часть. Таким образом, этот пример полностью иллюстрирует доказанную в данной работе теорему.

В заключение необходимо отметить, что полученные результаты могут быть применены для дальнейшего развития теории полугрупп, в частности, построенное точное решение задачи Коши (1) может быть положено в основу различных схем теории возмущений, а найденное в следствии 3 теоремы интегральное ядро оператора резольвенты инфинитезимального генератора полугруппы (6) даёт возможность вычислить резольвенты последовательных степеней этого оператора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. – 1998. – V. 32, № 2. – P. 261–278.
2. Yoshida K. The Hopf bifurcation and its stability for semilinear diffusion equations with time delay arising in ecology // *Hiroshima Mathematical Journal*. – 1982. – V. 12, № 2. – P. 321–348.
3. Муравник А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // *Современная математика. Фундаментальные направления*. – 2014. – Т. 52. – С. 3–141.
4. Крейн С. Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. – М.: Наука, 1989. – 768 с.
6. Хилле Э., Филлипс Р. С. *Функциональный анализ и полугруппы*. – М.: ИЛ, 1962. – 830 с.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление*. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.