

ШАМАНАЕВ П. А., ПРОХОРОВ С. А.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ
МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА–ШМИДТА**

Аннотация. Работа посвящена нахождению периодических решений линейных систем с двумя степенями свободы и малым параметром методом Ляпунова-Шмидта. На основе метода Ляпунова-Шмидта разработан алгоритм в пакете Maple, построены графики компонент периодических решений и фазовых траекторий возмущенной системы.

Ключевые слова: система с двумя степенями свободы, вынужденные колебания, периодические решения, малый параметр, метод Ляпунова-Шмидта, резонанс, Maple.

SHAMANAEV P. A., PROKHOROV S. A.

**INVESTIGATION OF FORCED VIBRATIONS OF A LINEAR SYSTEM
WITH TWO DEGREES OF FREEDOM AND A SMALL PARAMETER
BY THE LYAPUNOV-SCHMIDT METHOD**

Abstract. The article is devoted to finding periodic solutions to linear systems with two degrees of freedom and a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method. On the basis of the Lyapunov-Schmidt method, an algorithm was developed in the Maple package, graphs of the components of periodic solutions and phase trajectories of the disturbed system were constructed.

Keywords: system with two degrees of freedom, forced oscillations, periodic solutions, small parameter, Lyapunov-Schmidt method, resonance, Maple.

Введение. Математические модели в линейном приближении могут быть описаны как неоднородные линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. Общая методика исследования периодических решений таких систем описана в работе [1]. Она основана на представлении исследуемой системы в виде операторного уравнения в банаховом пространстве и применении метода Ляпунова-Шмидта [2–4].

В работе [5] приведено исследование периодических решений одной линейной неоднородной системы второго порядка с малым линейным возмущением. В работе [6] проведено исследование вынужденных колебаний одной линейной системы двух связанных осцилляторов с малым параметром.

В настоящей работе исследуются вынужденные колебания линейной системы с двумя степенями свободы и малым параметром при условии, что на систему действует внешняя периодическая сила с двумя соизмеримыми частотами.

Математическая модель вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы и малым параметром. Рассмотрим математическую модель вынужденных колебания системы с двумя степенями свободы в виде [7]

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + n_1^2 Q_1 - K Q_2 = F_1(t), \\ \ddot{Q}_2 + n_2^2 Q_2 - K Q_1 = F_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где n_1^2 и n_2^2 – парциальные частоты, $K > 0$, функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_1(t) &= r_{11} \sin(\omega_1 t + \theta_{11}) + r_{12} \sin(\omega_2 t + \theta_{12}), \\ F_2(t) &= r_{21} \sin(\omega_1 t + \theta_{21}) + r_{22} \sin(\omega_2 t + \theta_{22}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_{ks}, \theta_{ks}, \omega_k \in R, k, s = 1, 2, \omega_2 = \alpha \omega_1, \alpha \in Z$. Обозначим $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$.

Исследуем вынужденные колебания системы (1), когда параметры системы мало отклоняются от заданных значений и две частоты вынужденных колебаний совпадают с двумя частотами собственных колебаний (случай резонанса). В этом случае, система (1) с учетом малого параметра будет иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + (n_1^2 + \varepsilon d_{11})q_1 + (-K + \varepsilon d_{12})q_2 = F_1(t), \\ \ddot{q}_2 + (-K + \varepsilon d_{21})q_1 + (n_2^2 + \varepsilon d_{22})q_2 = F_2(t), \end{cases} \quad (3)$$

Где $d_{ks} \in R, k, s = 1, 2, \varepsilon$ – малый вещественный параметр. Заметим, что система (1) получается из системы (3), если положить $\varepsilon = 0$.

Сформулируем задачу для системы (3): при достаточно малых вещественных ε найти T -периодическое решение $q_1(t, \varepsilon), q_2(t, \varepsilon)$ системы (3), удовлетворяющее условию $q_1(t, 0) = Q_1(t), q_2(t, 0) = Q_2(t)$, где $Q_1(t), Q_2(t)$ есть T -периодическое решение системы (1).

Периодичность решения $Q_1(t), Q_2(t)$ системы (1) достигается за счет подбора амплитуд r_{ks} и начальных фаз θ_{ks} в формуле (2) для периодических функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$.

Представление математической модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Делая в системе (3) замену

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1, x_2 = \dot{q}_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2, \\ x_3 &= q_2, x_4 = \dot{q}_2 \Rightarrow \dot{x}_3 = x_4, \end{aligned} \quad (4)$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\frac{dx}{dt} = (B_0 - \varepsilon B_1)x - f(t), \quad (5)$$

где $x \in R^4$,

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -n_1^2 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K & 0 & -n_2^2 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{1,1} & 0 & d_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{2,1} & 0 & d_{2,2} & 0 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1(t) \\ 0 \\ -F_2(t) \end{pmatrix}.$$

Системе (1) соответствует неоднородная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t). \quad (6)$$

В этом случае задача, сформулированная для систем (1) и (3), перейдет в задачу для систем (5) и (6) в следующем виде: при достаточно малых вещественных ε найти T -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ системы (5), удовлетворяющее условию $x(t, 0) = z(t)$, где $z(t)$ является T -периодическим решением системы (6).

В дальнейшем систему (5) будем называть возмущенной системой, а систему (6) – невозмущенной.

Вычисление периодического решения возмущенной системы методом Ляпунова-Шмидта. В работе [1] приведено решение поставленной задачи методом Ляпунова-Шмидта. Периодическое решение возмущенной системы будем вычислять с помощью разработанного на основе метода Ляпунова-Шмидта алгоритма в математическом пакете Maple.

Для иллюстрации разработанного алгоритма в пакете Maple выберем параметры системы (5) следующим образом:

$$\omega_1 = 3, \omega_2 = 9, n_1^2 = n_2^2 = 45, K = 36, d_{11} = -2, d_{22} = 2, d_{12} = d_{21} = 0.$$

Собственные значения матрицы B_0 при выбранных значениях параметров равны

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i, \quad \lambda_{3,4} = \pm 9i.$$

Поскольку для системы (6) частоты собственных колебаний совпадают с частотами вынужденных колебаний, то для система (6), а значит и системы (1) имеет место случай резонанса. В этом случае $T = \frac{2\pi}{3}$ и задача сводится к нахождению $\frac{2\pi}{3}$ -периодического решения системы (5).

Вычислим обобщенный жорданов набор оператора

$$\mathcal{B}_0 = B_0 x - A \frac{dx}{dt}$$

по формулам

$$\mathcal{B}_0 \varphi_k^{(1)} = 0, \quad \mathcal{B}_0 \varphi_k^{(j)} = B_1 \varphi_k^{(j-1)}, \quad (7)$$

где $j = \overline{2, p_k}, k = \overline{1, n}$.

Согласно методу Эйлера, решения уравнений (7), будем искать в виде

$$\varphi_k^{(j)} = u_k^{(j)} e^{\lambda t}, \quad (8)$$

где $\lambda \in R, u_k^{(j)} \in R^4$.

Подставляя формулы (8) в уравнения (7), получим следующие элементы обобщенных жордановых цепочек оператора \mathcal{B}_0

$$\varphi_1^{(1)}(t) = e^{i3t} \begin{pmatrix} -\frac{i}{3} \\ 1 \\ -\frac{i}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1^{(2)}(t) = e^{3it} \begin{pmatrix} -\frac{i}{54} \\ \frac{1}{18} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\varphi_2^{(1)}(t) = e^{i9t} \begin{pmatrix} -\frac{i}{9} \\ -1 \\ -\frac{i}{9} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2^{(2)}(t) = e^{i9t} \begin{pmatrix} -\frac{i}{162} \\ \frac{1}{18} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Здесь число и длины жордановых цепочек равны $n = 2$, $p_1 = p_2 = 2$, соответственно.

Элементы обобщенных жордановых цепочек сопряженного оператора \mathcal{B}_0^* , удовлетворяющих условию биортогонализации, имеют вид

$$\psi_1^{(1)} = e^{3it} \begin{pmatrix} 81 \\ 27i \\ 81 \\ 27i \end{pmatrix}, \quad \psi_1^{(2)} = e^{3it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{2} \\ -\frac{3i}{2} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\psi_2^{(1)} = e^{9it} \begin{pmatrix} 729 \\ 81i \\ -729 \\ -81i \end{pmatrix}, \quad \psi_2^{(2)} = e^{9it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{81}{2} \\ -\frac{9i}{2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Коэффициенты c_{kj} в разложении искомого периодического решения вычислим по формулам

$$c_{kj} = \langle \langle f, \psi_k^{(j)} \rangle \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle f(t), \psi_k^{(j)}(t) \rangle dt, \quad k, j = \overline{1, 2}.$$

Учитывая формулы (11) и (12), получим

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{27r_{11}e^{i\theta_{11}}}{2} + \frac{27r_{12}e^{i\theta_{12}}}{2}, & c_{12} &= \frac{3r_{12}e^{i\theta_{12}}}{4}, \\ c_{21} &= \frac{81r_{21}e^{i\theta_{21}}}{2} - \frac{81r_{22}e^{i\theta_{22}}}{2}, & c_{22} &= -\frac{9r_{22}e^{i\theta_{22}}}{4}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для того, чтобы система (6) имела T -периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы $c_{11} = 0$ и $c_{21} = 0$ [1], что эквивалентно следующим условиям, соответственно,

$$r_{11}e^{i\theta_{11}} + r_{12}e^{i\theta_{12}} = 0, \quad (14)$$

$$r_{21}e^{i\theta_{21}} - r_{22}e^{i\theta_{22}} = 0. \quad (15)$$

Решения уравнений (14) и (15) можно записать в параметрической форме, соответственно,

$$r_{11} = r_{12} = r_1, \quad \theta_{11} = \theta_1, \quad \theta_{12} = \theta_1 + \pi, \quad (16)$$

$$r_{21} = r_{22} = r_2, \theta_{21} = \theta_2, \theta_{22} = \theta_2, \quad (17)$$

где $r_k, \theta_k, k = 1, 2$, – произвольные вещественные параметры.

После подстановки формул (16) и (17) в выражения (13), получим

$$c_{11} = 0, \quad c_{12} = \frac{3r_1 e^{i\theta_1}}{4}, \quad c_{21} = 0, \quad c_{22} = -\frac{9r_2 e^{i\theta_2}}{4}. \quad (18)$$

Тогда при $\varepsilon \neq 0$ вычисляя величины ξ_k по формулам (3.3) из работы [1], получим

$$\xi_1 = -\frac{3r_1 e^{i\theta_1}}{4\varepsilon}, \quad \xi_2 = -\frac{9r_2 e^{i\theta_2}}{4\varepsilon} \quad (19)$$

Дополнительное слагаемое $y(\varepsilon)$, входящее в $\frac{2\pi}{3}$ -периодическое решение системы (5)

и принадлежащие к дополнению корневого пространства, имеет вид

$$y(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{(18\varepsilon + 1)}{36\varepsilon^2 - 36} r_1 \sin(3t + \theta_1) - \frac{(18\varepsilon - 1)}{36\varepsilon^2 - 36} r_2 \sin(9t + \theta_2) \\ -\frac{(18\varepsilon + 1)}{12\varepsilon^2 - 12} r_1 \cos(3t + \theta_1) - \frac{(18\varepsilon - 1)}{4\varepsilon^2 - 4} r_2 \cos(9t + \theta_2) \\ -\frac{\varepsilon}{2\varepsilon^2 - 2} r_1 \sin(3t + \theta_1) + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon^2 - 2} r_2 \sin(9t + \theta_2) \\ -\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon^2 - 2} r_1 \cos(3t + \theta_1) + \frac{9\varepsilon}{2\varepsilon^2 - 2} r_2 \cos(9t + \theta_2) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Таким образом, подставляя формулы (9), (10), (18) и (19) в выражение (3.4) из работы [1], получим $\frac{2\pi}{3}$ -периодическое решение системы (5)

$$x(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\varepsilon} r_1 \sin(3t + \theta_1) - \frac{1}{2\varepsilon} r_2 \sin(9t + \theta_2) \\ \frac{3}{2\varepsilon} r_1 \cos(3t + \theta_1) - \frac{9}{2\varepsilon} r_2 \cos(9t + \theta_2) \\ -\frac{1}{2\varepsilon} r_1 \sin(3t + \theta_1) + \frac{1}{2\varepsilon} r_2 \sin(9t + \theta_2) \\ -\frac{3}{2\varepsilon} r_1 \cos(3t + \theta_1) + \frac{9}{2\varepsilon} r_2 \cos(9t + \theta_2) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Построение графиков компонент периодического решения и фазовых траекторий системы (3). Учитывая замену (4) из формулу (21), получим

$$q_1(t, \varepsilon) = -\frac{1}{2\varepsilon} r_1 \sin(3t + \theta_1) - \frac{1}{2\varepsilon} r_2 \sin(9t + \theta_2),$$

$$q_2(t, \varepsilon) = -\frac{1}{2\varepsilon} r_1 \sin(3t + \theta_1) + \frac{1}{2\varepsilon} r_2 \sin(9t + \theta_2).$$

Для построения графиков компонент решений и фазовых траекторий системы (3) выберем следующие наборы параметров:

- 1) $r_1 = 0,5; r_2 = 0,3; \theta_1 = 0; \theta_2 = 0;$
- 2) $r_1 = 0,5; r_2 = 0,3; \theta_1 = 0; \theta_2 = \frac{2\pi}{5};$
- 3) $r_1 = 0,5; r_2 = 0,3; \theta_1 = 0; \theta_2 = \frac{4\pi}{5}.$

На рис. 1 и рис. 2. для случая 1) приведены графики компонент $\frac{2\pi}{3}$ -периодического решения и фазовых траекторий системы (3) при различных значениях параметра ε .

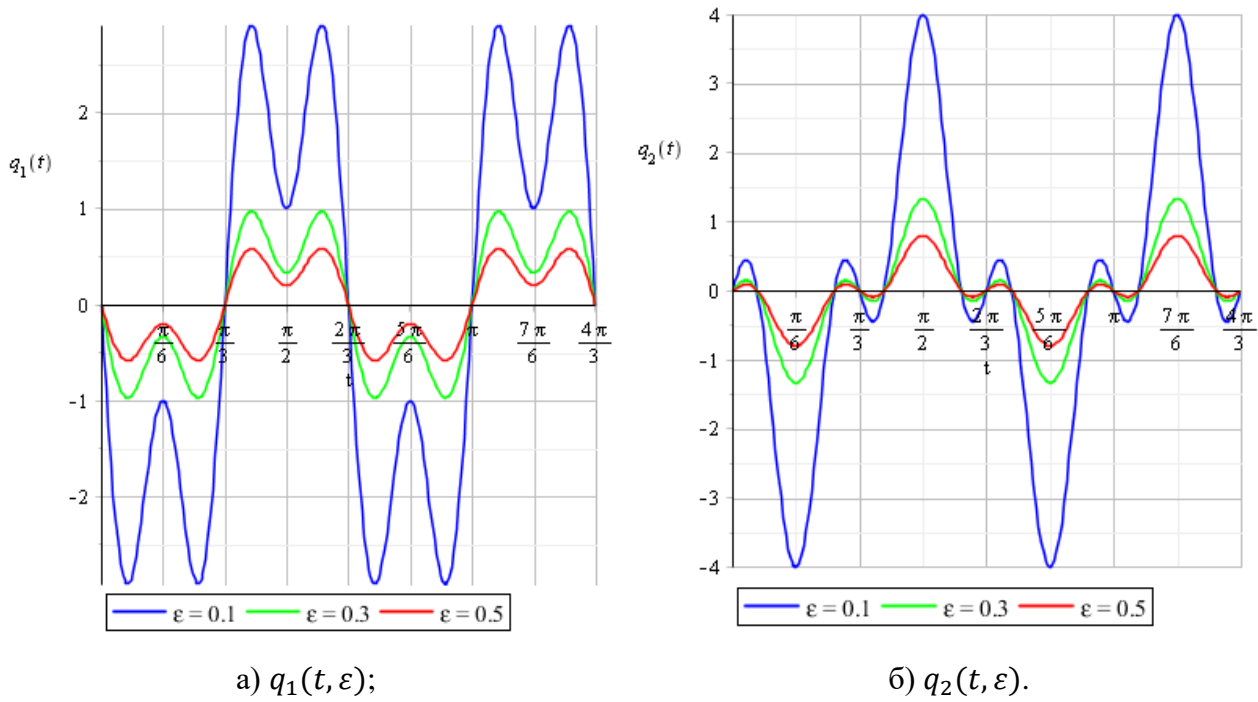


Рис. 1. Графики компонент а) $q_1(t, \varepsilon)$ и б) $q_2(t, \varepsilon)$ $\frac{2\pi}{3}$ -периодического решения системы (3) при различных значениях параметра ε в случае 1).

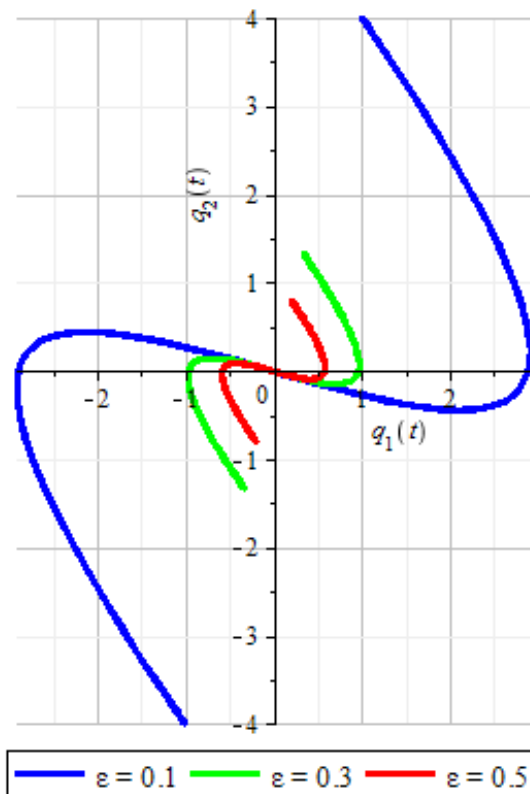
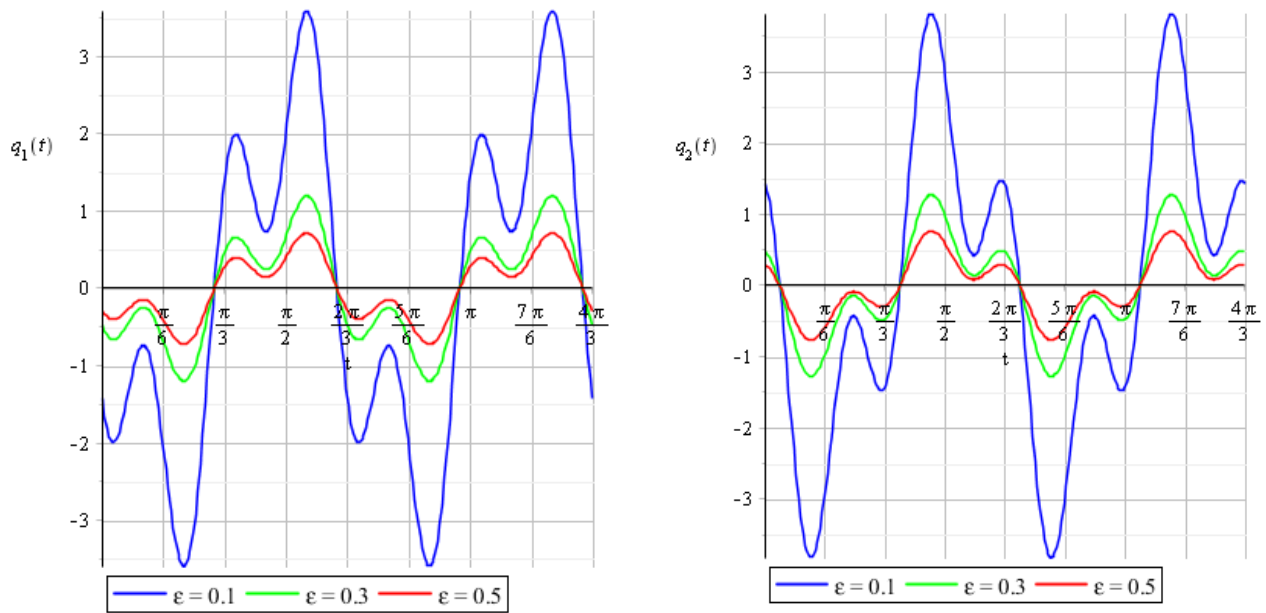


Рис. 2. График фазовой траектории системы (3) в конфигурационном пространстве Oq_1q_2 при различных ε в случае 1).

На рис. 3 и рис. 4. для случая 2) приведены графики компонент $\frac{2\pi}{3}$ -периодического решения и фазовых траекторий системы (3) при различных значениях параметра ε .



а) $q_1(t, \varepsilon)$;

б) $q_2(t, \varepsilon)$.

Рис. 3. Графики компонент а) $q_1(t, \varepsilon)$ и б) $q_2(t, \varepsilon)$ $\frac{2\pi}{3}$ -периодического решения системы (3) при различных значениях параметра ε в случае 2).

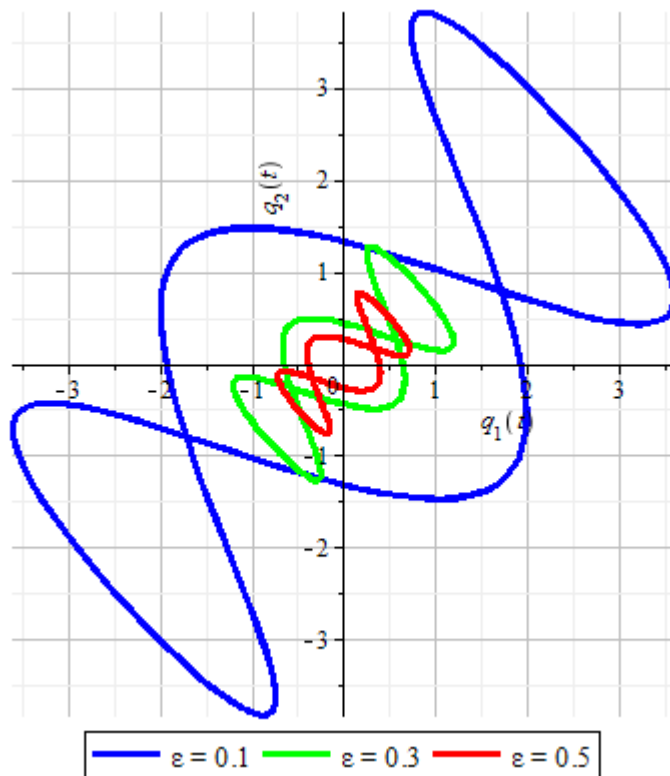


Рис. 4. График фазовой траектории системы (3) в конфигурационном пространстве Oq_1q_2 при различных ε в случае 2).

На рис. 5 и рис. 6. для случая 3) приведены графики компонент $\frac{2\pi}{3}$ -периодического решения и фазовых траекторий системы (3) при различных значениях параметра ε .

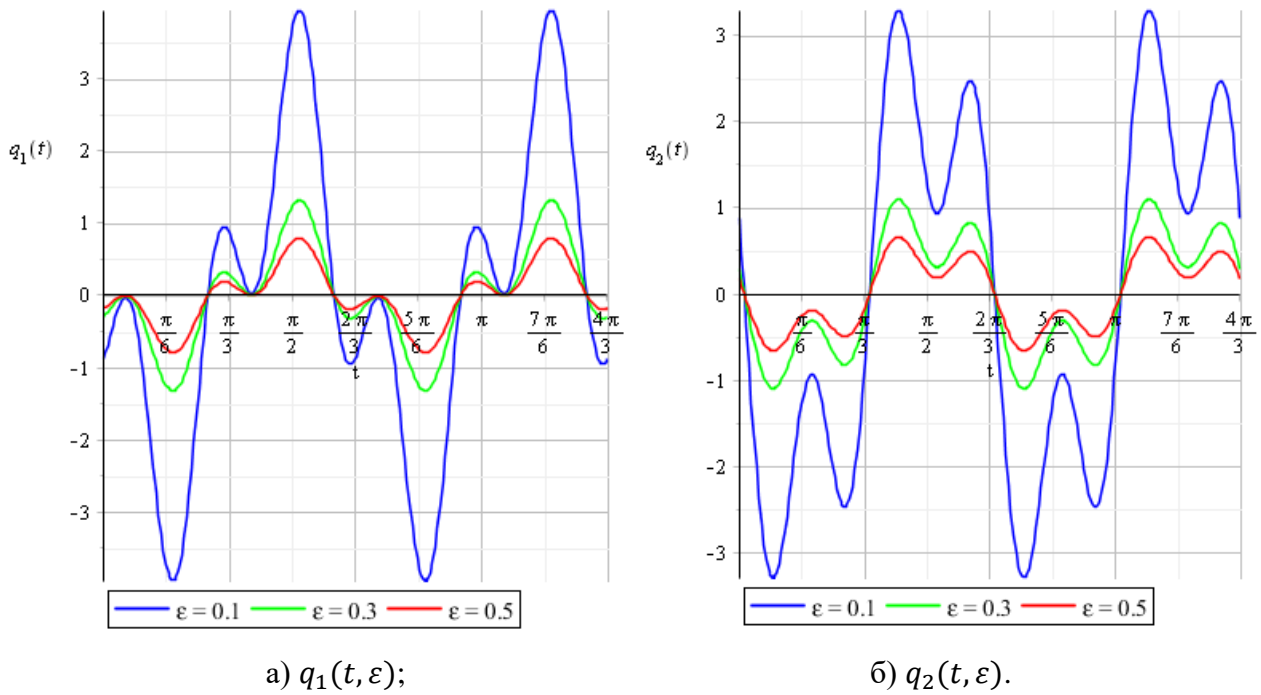


Рис. 5. Графики компонент а) $q_1(t, \varepsilon)$ и б) $q_2(t, \varepsilon)$ $\frac{2\pi}{3}$ -периодического решения системы (3) при различных значениях параметра ε в случае 3).

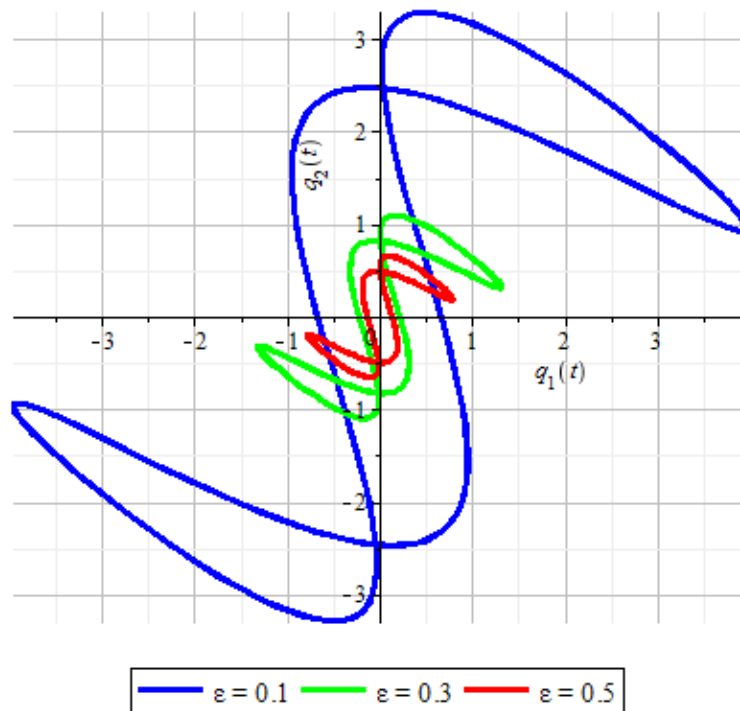


Рис. 6. График фазовой траектории системы (3) в конфигурационном пространстве Oq_1q_2 при различных ε в случае 3).

Заключение. Из формулы (21) следует, что каждая компонента $\frac{2\pi}{3}$ – периодического решения системы (3) имеют полюс первого порядка в точке $\varepsilon = 0$ и зависит от тех же начальных фаз θ_{ks} и амплитуд r_{ks} , что и периодические функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 45–53.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука. – 1964. – 524 с.
3. Коноплева И. В., Логинов Б. В. Обобщенная жорданова структура и симметрия разрешающих систем ветвления // Вестник Самарского университета. – 2001. – № 4. – С. 56–84.
4. Коноплева И. В., Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2009. – С. 115–124.
5. Кадрякова М. Р., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О периодических решениях одного класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в резонансном случае // Огарев-online. – 2017. – № 13. – С. 8–17 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/o-periodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistem-obuyknovennyx-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnom-sluchae> (дата обращения: 25.09.2021).
6. Карчиганов А. Ф., Шаманаев П. А. Исследование вынужденных колебаний одной линейной системы двух связанных осцилляторов с малым параметром // Огарев-online. – 2020. – № 13. – С. 8–17 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-odnoj-linejnoy-sistemy-dvux-svyazannyx-oscillyatorov-s-malym-parametrom> (дата обращения: 25.09.2021).
7. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний: Учебник. – 3-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2005. – 440 с.