СИДОРЕНКО Д. С., МУРЮМИН С. М.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Аннотация. Получены оценки возмущения для постоянных матричных операторов, использующихся для описания операторно-разностных схем, при которых гарантируется асимптотическая эквивалентность оных. Проведены подтверждающие численные эксперименты.

Ключевые слова: асимптотическая эквивалентность, разностная схема, операторно-разностная схема, порядок аппроксимации, оценка возмущения, численный эксперимент.

SIDORENKO D. S., MURYUMIN S. M.

ASYMPTOTIC EQUIVALENCE OF TWO-STAGE DIFFERENCE SCHEMES

Abstract. Value estimations for fluctuations of difference schemes' matrix operators, which provide asymptotic equivalence of these schemes, are obtained. Numeric experiments for the confirmation of theoretic results are described.

Keywords: asymptotic equivalence, difference scheme, operator-difference scheme, approximation order, estimation of fluctuation, numeric experiment.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений типа

$$Lu + f(x) = 0$$

можно трактовать как операторные уравнения:

$$Au = f.$$

Это справедливо в частности для уравнений параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t),$$

исследованию асимптотического поведения разностных схем для которых и посвящена эта работа.

Рассмотрим искомую функцию $u = u(x,t)$ как некоторую абстрактную функцию $u(t)$ со значениями в некотором банаховом пространстве. Если ввести для t равномерную сетку с шагом τ, то можно получить выражение для r-слойной операторно-разностной схемы:

$$B_0(t_n)u(t_{n+1}) = \sum_{s=1}^{r-1} C_s(t_n)u(t_{n+1-s}) + f(t_n), \qquad n \geq r-1,$$

где $B_0(t), C_s(t)$ – линейные операторы, действующие из некоторого линейного нормированного пространства $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, которое в свою очередь зависит от некоторого параметра h. Заметим, что эти линейные операторы также зависят от τ и h.

Тогда для двухслойной схемы имеем:

$$B_0 u_{n+1} + B_1 u_n = \tau \tilde{f}_n, \qquad n \geq 0.$$

Выполняя замену, предложенную в [1], получим каноническую форму двухслойных схем:

$$B(t_n)\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + A(t_n)u_n = \tilde{f}_n, \qquad n \geq 0;$$

$$Bu_t + Au = \tilde{f}(t). \tag{1}$$

Рассмотрим первую краевую задачу для одномерного однородного уравнения теплопроводности:

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = \psi_1(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \\ u(0,t) = \psi_2(t), \qquad 0 \leq t \leq T. \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть τ – шаг сетки по t, h – шаг сетки по x. Тогда для этой задачи (1) примет вид

$$Bu_t + Au = 0,\ B = E + \tau A,\ A = -\Lambda, \tag{3}$$

где Λ – оператор вторых конечных разностей:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{h^2}.$$

Разрешая (3) через u_{n+1} – значение на верхнем слое, – получим

$$u_{n+1} = Ru_n, \qquad R = E - \tau B^{-1}A,$$

где оператор R называется *оператором перехода*, а B^{-1} – обратный к B оператор.

Рассмотрим два разностные схемы:

$$u_{n+1} = R_1 u_n, \qquad u_{n+1} = R_2 u_n, \qquad R_1 = R_h^{(1)} \neq R_h^{(2)} = R_2.$$

Согласно [2], условие асимптотической эквивалентности разностных схем при условии согласования норм можно записать как

$$\left\| R_h^{(1)^n} - R_h^{(2)^n} P_2 \right\| \leq Ch^l,$$

$$\left\| R_h^{(1)^n} P_1 - R_h^{(2)^n} \right\| \leq Ch^l,$$

где P_1, P_2 – некоторые операторы, воздействующие на начальные условия, соответствующие первой и второй разностной схеме, l – порядок аппроксимации.

Не теряя общности, можно положить

$$P_1 \equiv P_2 \equiv E.$$

Тогда получим иную форму условия асимптотической эквивалентности:

$$\|R_1^n - R_2^n\| \le Ch^l. \tag{4}$$

Получим некоторые оценки для нормы выше, при которых (4) справедливо.

Для *явной* схемы $B \equiv E$, поэтому оператор перехода имеет вид

$$R = E - \tau A.$$

Рассмотрим два различных оператора A_1 и A_2 такие, что:

$$A_2 = A_1 + Q, \tag{5}$$

где Q – оператор возмущения. В этой работе будем полагать, что возмущение постоянно и одинаково для каждого узла сетки:

$$Q = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Тогда имеем два оператора перехода R_1 и R_2:

$$R_1 = E - \tau A_1, \qquad R_2 = E - \tau A_2.$$

Получим оценку для возмущения ε, при котором схемы, порождаемые операторами R_1 и R_2, являются асимптотически эквивалентными.

Подставляя операторы в левую часть условия (4) и используя формулу разности степеней:

$$\|R_1^n - R_2^n\| = \|(R_1 - R_2)(R_1^{n-1} + R_1^{n-2}R_2 + \dots + R_1R_2^{n-2} + R_2^{n-1})\|. \tag{7}$$

Здесь и далее будем рассматривать m-норму:

$$\|A\| = \|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Обозначим множители в правой части (7) как D_1 и D_2, то есть:

$$\|R_1^n - R_2^n\| = \|D_1 D_2\|, \tag{8}$$

$$D_1 = R_1 - R_2, \qquad D_2 = R_1^{n-1} + R_1^{n-2}R_2 + \dots + R_1R_2^{n-2} + R_2^{n-1}.$$

По свойству нормы:

$$\|D_1 D_2\| \le \|D_1\| \cdot \|D_2\|. \tag{9}$$

Сначала оценим вторую норму, потому что далее эта оценка будет справедлива для всех рассматриваемых случаев. Имеем:

$$\|D_2\| = \|R_1^{n-1} + R_1^{n-2}R_2 + \dots + R_1R_2^{n-2} + R_2^{n-1}\|.$$

По теореме о достаточных условиях устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах [1] можно положить:

$$\|R_1^{n-1}\| \le M_1, \qquad \|R_2^{n-1}\| \le M_2,$$

$$\|R_1^m R_2^{n-1-m}\| \le \max(M_1, M_2, M_1 M_2) = M, \qquad 0 \le m \le n-1.$$

Получим

$$\|D_2\| = \|R_1^{n-1} + R_1^{n-2}R_2 + \dots + R_1 R_2^{n-2} + R_2^{n-1}\| \le nM. \tag{10}$$

Теперь оценим первую норму

$$\|D_1\| = \|E - \tau A_1 - E + \tau A_2\| = \|\tau(A_2 - A_1)\| \le |\tau| \cdot \|A_2 - A_1\|$$

Учитывая, что $\tau > 0$:

$$\|D_1\| \le |\tau| \cdot \|A_2 - A_1\| = \tau\|A_1 + Q - A_1\| = \tau\|Q\|. \tag{11}$$

Легко вычислить норму Q:

$$\|Q\| = \max_i \textstyle\sum_j |q_{ij}| = \max_i(2\varepsilon, 3\varepsilon) = 3\varepsilon. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11):

$$\|D_1\| \le \ \tau\|Q\| = 3\tau\varepsilon. \tag{13}$$

Объединяя (8), (9), (10) и (13), получим:

$$\|R_1^n - R_2^n\| \le 3\tau\varepsilon n M.$$

Выполняя замену $\tau = rh^2,\ n = h^{-1}$, имеем:

$$\|R_1^n - R_2^n\| \le 3Mr\varepsilon h.$$

Используя правую часть условия (4):

$$3Mr\varepsilon h \le Ch^l,$$

или

$$\varepsilon \le \tilde{C}h^{l-1},\ \tilde{C} = \frac{C}{3Mr}. \tag{14}$$

Теперь получим аналогичную оценку для *неявной* схемы, когда возмущениям подвержен только оператор A.

Рассмотрим два различных оператора A_1 и A_2 аналогично (5). Получим два оператора перехода R_1 и R_2:

$$R_1 = E - \tau B^{-1}A_1, \qquad R_2 = E - \tau B^{-1}A_2.$$

Как было сказано ранее, оценка для D_2 из (8) остаётся прежней, поэтому нас интересует оценка D_1:

$$\|D_1\| = \|E - \tau B^{-1}A_1 - E + \tau B^{-1}A_2\| =$$

$$= \|\tau B^{-1}(A_2 - A_1)\| \le \tau\|B^{-1}\| \cdot \|Q\| = 3\tau\varepsilon\|B^{-1}\|. \tag{15}$$

Для оценки $\|B^{-1}\|$ воспользуемся тем, что B – монотонная матрица. Действительно, используя (3):

$$B = E - \tau A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{\tau}{h^2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & \dots & 0 \\ r & 1-2r & r & \dots & 0 \\ 0 & r & 1-2r & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix}.$$

В работе [3] представлена теорема, согласно которой для монотонной матрицы G

$$\|G^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{R_*(G)},$$

где $R_*(G)$ – минимальная величина диагонального преобладания матрицы G. Заметим, что здесь используется -норма, но для симметричной матрицы они взаимозаменяемы:

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \|A\|_\infty.$$

Вычислим $R_*(B)$:

$$R_*(B) = 1 + 2r - r - r = 1.$$

Таким образом

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{R_*(B)} = \frac{1}{1} = 1. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15):

$$\|D_1\| \leq 3\tau\varepsilon \|B^{-1}\| \leq 3\tau\varepsilon. \quad (17)$$

Так как оценка (17) совпадает с оценкой (13), а оценка (10) одинакова для обоих случаев, то делаем вывод, что для неявной схемы в случае $A_1 \neq A_2$ оценка возмущения одинакова и выражается (14).

Наконец рассмотри случай, когда для *неявной* схемы $A_1 \equiv A_2, B_1 \neq B_2$. Имеем:

$$R_1 = E - \tau B_1^{-1} A, \qquad R_2 = E - \tau B_2^{-1} A,$$

$$B_2 = B_1 + Q,$$

причём Q по-прежнему имеет вид (6).

Рассмотрим оценку D_1:

$$\|D_1\| = \|E - \tau B_1^{-1} A - E + \tau B_2^{-1} A\| \leq$$

$$\leq \|\tau A (B_2^{-1} - B_1^{-1})\| \leq \tau \|A\| \cdot \|B_2^{-1} - B_1^{-1}\|. \quad (18)$$

Легко вычислить норму A:

$$\|A\| = \max_i \sum_j |q_{ij}| = \max_i (2h^{-2} + h^{-2}, 2h^{-2} + h^{-2} + h^{-2}) = 4h^{-2}.$$

Подставляя её в (18):

$$\|D_1\| \leq \tau \cdot 4h^{-2}\|B_2^{-1} - B_1^{-1}\|.$$

Для оценки $\|B_2^{-1} - B_1^{-1}\|$ используем теорему о матрице, обратной сумме матриц [4], в частности её формой как тождества Хуа [5]:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - (A + AB^{-1}A)^{-1}.$$

Оценим

$$\|B_2^{-1} - B_1^{-1}\| = \|(B_1 + Q)^{-1} - B_1^{-1}\| = \|B_1^{-1} - (B_1 + B_1Q^{-1}B_1)^{-1} - B_1^{-1}\| =$$
$$= \|(B_1 + B_1Q^{-1}B_1)^{-1}\| = \|(B_1(E + Q^{-1}B_1))^{-1}\|.$$

По свойству обратной матрицы:

$$\|(B_1(E + Q^{-1}B_1))^{-1}\| = \|(E + Q^{-1}B_1)^{-1}B_1^{-1}\| \leq \|(E + Q^{-1}B_1)^{-1}\| \cdot \|B_1^{-1}\|$$

Оценка нормы невозмущенной матрицы B представлена выражением (16). Подставим её вместо $\|B^{-1}\|$:

$$\|(E + Q^{-1}B_1)^{-1}\| \cdot \|B_1^{-1}\| \leq \|(E + Q^{-1}B_1)^{-1}\| = \left\|\left(Q^{-1}(B_1 + Q)\right)^{-1}\right\| =$$
$$= \|(B_1 + Q)^{-1}Q\| \leq \|(B_1 + Q)^{-1}\| \cdot \|Q\|.$$

Используя оценку нормы оператора Q, представленной (12), имеем

$$\|(B_1 + Q)^{-1}\| \cdot \|Q\| \leq 3\varepsilon\|(B_1 + Q)^{-1}\|. \tag{19}$$

Для оценки $\|(B_1 + Q)^{-1}\|$ снова воспользуемся теоремой из [3]. Чтобы однозначно вычислить $R_*(B_1 + Q)$, введём условие

$$r > \varepsilon. \tag{20}$$

Тогда

$$R_*(B_1 + Q) = 1 + 2r + \varepsilon - (r - \varepsilon) - (r - \varepsilon) =$$
$$= 1 + 2r + \varepsilon - 2r + 2\varepsilon = 1 + 3\varepsilon.$$

Таким образом

$$\|(B_1 + Q)^{-1}\| \leq \frac{1}{R_*(B_1 + Q)} = \frac{1}{1 + 3\varepsilon}.$$

Подставляя в (19), получаем

$$\|(B_1 + Q)^{-1}\| \cdot \|Q\| \leq 3\varepsilon\|(B_1 + Q)^{-1}\| \leq 3\varepsilon \cdot \frac{1}{1 + 3\varepsilon} \leq 3\varepsilon.$$

Объединяя рассуждения выше:

$$\|D_1\| \leq \tau \cdot 4h^{-2}\|B_2^{-1} - B_1^{-1}\| \leq \tau \cdot 4h^{-2} \cdot 3\varepsilon = 12\tau\varepsilon h^{-2}.$$

Выполняя замену $\tau = rh^2$ и объединяя с оценкой нормы D_2:

$$\|R_1^n - R_2^n\| = \|D_1D_2\| \leq 12Mr\varepsilon h^{-1} \leq Ch^l,$$

или

$$\varepsilon \leq \tilde{C}h^{l+1},\ \tilde{C} = \frac{C}{12Mr}. \tag{21}$$

Проверим корректность полученных оценок в рамках численного эксперимента. Рассмотрим краевую задачу (2), для которой

$$\phi(x) = \sin \pi x, \qquad \psi_1(t) \equiv 0, \qquad \psi_2(t) \equiv 0, \qquad L = 1,$$
$$h = 0.01, \qquad r = 0.4.$$

Эта задача имеет точное решение:

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

Для решения с помощью неявной схемы будем использовать обычный метод прогонки. Явная схема имеет первый порядок аппроксимации ($l = 1$), поэтому (14) для явной схемы имеет вид

$$\varepsilon \le \tilde{C} h^0 = \tilde{C}.$$

Неявная схема имеет второй порядок аппроксимации ($l = 2$), поэтому (14) для неявной схемы ($A_1 \neq A_2$) имеет вид

$$\varepsilon \le \tilde{C} h,$$

а (21) для неявной схемы ($B_1 \neq B_2$) имеет вид

$$\varepsilon \le \tilde{C} h^3.$$

Таблица 1

Результаты численного эксперимента

Схема	ε	$\|R_1^n - R_2^n\|$	Итог
явная	0.000000	0.000004	эквивалентны
явная	0.000001	0.000004	эквивалентны
явная	0.000100	0.000006	эквивалентны
явная	0.010000	0.000120	эквивалентны
явная	0.100000	0.001157	эквивалентны
явная	1.000000	0.011472	эквивалентны
неявная ($A_1 \neq A_2$)	0.000000	0.000011	эквивалентны
неявная ($A_1 \neq A_2$)	0.000001	0.000011	эквивалентны
неявная ($A_1 \neq A_2$)	0.000100	0.000010	эквивалентны
неявная ($A_1 \neq A_2$)	0.010000	0.000028	эквивалентны
неявная ($A_1 \neq A_2$)	0.100000	0.000374	эквивалентны
неявная ($A_1 \neq A_2$)	1.000000	0.003827	неэквивалентны
неявная ($B_1 \neq B_2$)	0.000000	0.000011	эквивалентны
неявная ($B_1 \neq B_2$)	0.000001	0.000181	эквивалентны
неявная ($B_1 \neq B_2$)	0.000100	0.019000	неэквивалентны
неявная ($B_1 \neq B_2$)	0.010000	0.825713	неэквивалентны
неявная ($B_1 \neq B_2$)	0.100000	0.983464	неэквивалентны

В рамках эксперимента будем рассматривать возмущения

$$\varepsilon = [0, h^3, h^2, h, h^{0.5}, h^0] = [0, 0.000001, 0.0001, 0.01, 0.1, 1.0],$$

но заметим, что в виду (20) для неявной схемы ($B_1 \neq B_2$) мы не можем полагать $\varepsilon = 1.0$.

Результаты эксперимента представлены в таблице 1. Как можно видеть, все полученные оценки корректны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
2. Мурюмин С. М., Язовцева О. С. Асимптотическая эквивалентность разностных схем для решения задачи Коши [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции. (Саранск, 12-16 июля 2017 г.). – Саранск: СВМО, 2017. – С. 491–497. – Режим доступа: http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper67.pdf (дата обращения 12.04.2019).
3. Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л. Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т.50, № 6. – С. 1248–1254.
4. Henderson H. V., Searle S. R. On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices // SIAM Review. – 1981. – Vol. 23, No, 1. – P. 53–60.
5. Cohn P. M. Further Algebra and Applications. – London: Springer-Verlag, 2003. – 451 p.