ЯЗОВЦЕВА О. С.

ЛОКАЛЬНАЯ ПОКОМПОНЕНТНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. В статье вводится понятие локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно некоторых функций. Приведены достаточные условия, при выполнении которых у эквивалентных систем сохраняются свойства устойчивости, асимптотической устойчивости и асимптотического равновесия покомпонентно. В качестве примера рассмотрена математическая модель брутто-реакции пиролиза этана. Для нее построены взаимно-однозначные отображения, устанавливающие локальную покомпонентную асимптотическую эквивалентность решений исследуемой системы и ее линейного приближения. На основании построенных взаимно-однозначных отображений ненулевое положение равновесия системы исследовано на устойчивость по части переменных, а также найдены асимптотики решений.

Ключевые слова: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность по Брауеру и Левинсону, устойчивость по части переменных, пиролиз этана, химическая кинетика.

YAZOVTSEVA O. S.

LOCAL COMPONENT-WISE ASYMPTOTIC EQUIVALENCE AND ITS APPLICATION TO INVESTIGATE STABILITY WITH RESPECT TO A PART OF VARIABLES

Abstract. The article introduces the notion of local component-wise asymptotic equivalence of systems of ordinary differential equations in relation to some functions. The sufficient conditions of component-wise stability, asymptotic stability and asymptotic equilibrium are received. The mathematical model of the ethane pyrolysis brutto-reaction is considered. The one-to-one mapping of the model established the local component-wise asymptotic equivalence of solutions of the researched system and its linear approximation. A nontrivial equilibrium of the system was investigated for stability with respect to a part of variables based on the constructed one-to-one mapping. The asymptotics of the solutions were found.

Keywords: nonlinear ordinary differential equations, local component-wise Brauer and Levinson asymptotic equivalence, stability with respect to a part of variables, ethane pyrolysis, chemical kinetics.

Введение. Классификация множества систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее применение к исследованию устойчивости решений восходит к А. М. Ляпунову [1]. В случае, когда исследуется асимптотическое поведение решений при $t \to +\infty$, классификация носит название асимптотической эквивалентности [2–4]. Основные результаты исследования подобных отношений отражены в работах [2–18]. В работах [11–13] для классификации нелинейных систем введены понятия покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру и Левинсону относительно некоторых функций.

В настоящей работе продолжается развитие идей Е. В. Воскресенского [13] о покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру и Левинсону относительно некоторых функций нелинейных систем в некоторой области фазового пространства. Показано, что введенные определения позволяют исследовать устойчивость по части переменных и асимптотику решений более широкого класса нелинейных систем, чем в работах [11–13].

В качестве приложения рассмотрена математическая модель брутто-реакции пиролиза этана. Положение равновесия исследуемой системы исследовано на устойчивость по части переменных, а также найдена асимптотика решений в окрестности положения равновесия.

Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность по Брауэру и Левинсону. Рассмотрим множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $f \in C^{(0,1)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$, $T \geq 0$, $f(t,0) \equiv 0$.

Будем считать, что у системы вида (1) существует совокупность решений $x(t:t_0,x^{(0)})$, определенных при всех $t \geq t_0 \geq T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$, где $D-$ некоторая область пространства R^n, содержащая окрестность нуля.

Обозначим через $x(t:t_0,x^{(0)})$ и $y(t:t_0,y^{(0)})$ решения с начальными данными $(t_0,x^{(0)})$ и $(t_0,y^{(0)})$ соответственно системы дифференциальных уравнений (1) и системы

$$\frac{dy}{dt} = g(t,y), \tag{2}$$

принадлежащей множеству Ξ.

Следующие определения развивают идеи Е. В. Воскресенского о покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$ из работ [11–13].

Определение 1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и (2) назовем локально асимптотически эквивалентными по Брауэру относительно функции $\mu_i(t)$, если при фиксированном $t_0 \geq T$ существуют два отображения $P^{(1)}: V \to U$ и $P^{(2)}: U \to V$ такие, что

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)} x^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \tag{3}$$

$$y_i(t : t_0, y^{(0)}) = x_i(t : t_0, P^{(1)} y^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \tag{4}$$

при $t \to \infty$ для всех $i \in M_0 \subseteq \{1, ..., n\}$. Здесь $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ – i–ые компоненты решений, для которых $x^{(0)} \in \mathrm{U}, y^{(0)} \in V, U, V \subseteq D$ – некоторые области, содержащие окрестность нуля, $\mu_i : [T, +\infty) \to [0, +\infty)$.

Определение 2. Если в определении 1 положить $M_0 = \{1, ..., n\}$, то системы (1) и (2) будем называть локально асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$.

Замечание 1. Определение 2 обобщает определение локально асимптотически эквивалентных систем по Брауеру относительно функции $\mu(t)$ из работы [13]. Для этого достаточно в определении 2 положить $\mu_i(t) \equiv \mu(t), i = \overline{1, n}.$

Определение 3. Если в определении 1 положить $P^{(2)} = P^{(1)^{-1}}$, то системы (1) и (2) назовем локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Левинсону относительно функций $\mu_i(t)$. Если же кроме этого $M_0 = \{1, ..., n\}$, то системы (1) и (2) назовем локально асимптотически эквивалентными по Левинсону относительно функций $\mu_i(t)$.

Определение 4. Будем говорить, что система (1) имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам $i \in M_0 \subseteq \{1, ..., n\}$, если каждое ее решение $x(t : t_0, x^{(0)}),\ x^{(0)} \in U \subseteq R^n$, обладает свойством

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = b_i < \infty, i \in M_0, \tag{5}$$

и, наоборот, для любых чисел $b_i, i \in M_0$, таких, что $b = colon(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, существует решение $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U \subseteq D$, системы (1) такое, что справедливо равенство (5).

Определение 5. Если в определении 4 положить $M_0 = \{1, ..., n\}$, то будем говорить, что система (1) имеет локальное асимптотическое равновесие.

Сформулируем достаточные условия, когда локальные покомпонентные асимптотически эквивалентные по Брауэру системы сохраняют свойства устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных.

Теорема 1. Пусть системы (1) и (2) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауэру относительно функций $\mu_i(t)$, причем отображения $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ являются непрерывными в нуле и справедливы равенства

$$x_i(t:t_0,x^{(0)}) = y_i(t:t_0,P^{(2)}x^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t:t_0,x^{(0)}), \tag{6}$$

$$y_i(t:t_0,y^{(0)}) = x_i(t:t_0,P^{(1)}y^{(0)}) + \mu_i(t)\gamma_i(t:t_0,y^{(0)}), \tag{7}$$

где $\delta_i(t:t_0,x^{(0)})$ и $\gamma_i(t:t_0,y^{(0)})$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, соответственно. Тогда, если у одной системы существует устойчивое (асимптотически устойчивое) тривиальное решение по компонентам $i \in M_0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\mu_i = d_i, d_i \in R^1$ $\left(\lim\limits_{t\to+\infty}\mu_i = 0\right)$, то вторая система имеет также устойчивое (асимптотически устойчивое) тривиальное решение по компонентам $i \in M_0$; кроме того, если одна система имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам $i \in M_0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\mu_i = d_i,\ d_i \in R^1$ то этим же свойством будут обладать и решения другой системы.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству 1.6.6 из работы [13, с. 50].

Пусть система (2) обладает устойчивым (асимптотически устойчивым) тривиальным решением по компонентам $i \in M_0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\mu_i = d_i, d_i \in R^1$ $\left(\lim\limits_{t\to+\infty}\mu_i = 0\right)$. Сопоставим начальным значениям $\tilde{y} \in V$ решений системы (2) начальные значения $\tilde{x} = P^{(1)}\tilde{y}$ соответствующих решений системы (1).

Тогда, учитывая равенства (6), получим

$$\|x_i(t:t_0,\tilde{x})\| \le \|y_i(t:t_0,\tilde{y})\| + \mu_i(t)\delta_i(t:t_0,\tilde{x}), \tag{8}$$

где $\tilde{y} = P^{(2)}\tilde{x}$.

Пусть $\|\tilde{y}\| < \delta_1$. Тогда из непрерывности отображения $P^{(1)}$ в нуле следует

$$\|\tilde{x}\| = \|P^{(1)}\tilde{y}\| < \delta .$$

С учетом оценки (8) из устойчивости тривиального решения системы (2) по компонентам $i \in M_0$ и того, что $\delta_i(t:t_0,\tilde{x}) \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно по $\tilde{x}$ следует устойчивость тривиального решения системы (1) по компонентам $i \in M_0$, а из асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2) по компонентам $i \in M_0$ следует асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (1) по компонентам $i \in M_0$.

Пусть решения системы (2) при $y^{(0)} \in V$ имеют асимптотическое равновесие по компонентам $i \in M_0$. Это означает, что

$$\lim_{t \to +\infty} y_i(t : t_0, y^{(0)}) \equiv b_i,\ b_i \in R^1. \tag{9}$$

Из оценки (8) получаем

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{x_i(t : t_0,\ x^{(0)}) - y_i(t : t_0, P^{(2)} x^{(0)})}{\mu_i(t)} = 0\ ,\ i \in M_0, \tag{10}$$

и, следовательно, справедливы равенства (5).

Покажем теперь, для любых чисел $b_i,\ i \in M_0$, таких, что $b = colon(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, существует решение $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U \subseteq D$, системы (1) такое, что справедливо равенство (5). Для фиксированных чисел $b_i,\ i \in M_0$, $b = colon(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, найдем компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ решения системы (2) такие, что справедливы пределы (9). Учитывая (10), получаем справедливость равенств (5), и, следовательно, система (1) имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам $i \in M_0$.

Доказательство устойчивости (асимптотической устойчивости) тривиального решения системы (2), когда известно, что тривиальное решение системы (1) – устойчиво (асимптотически устойчиво), проводится аналогично на основании равенства (7).
Доказательство завершено.

Исследование асимптотики поведения решений системы дифференциальных уравнений математической модели брутто-реакции пиролиза этана.

Рассмотрим брутто-реакцию пиролиза этана [19–21]:

$$\begin{aligned} &C_2H_6 \to C_2H_4 + H_2 \\ &2C_2H_6 \to C_2H_4 + 2CH_4 \end{aligned}.$$

Математическая модель реакции имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -k_1 c_1 - 2k_2 c_1^2 \\ \dot{c}_2 = k_1 c_1 + k_2 c_1^2 \\ \dot{c}_3 = k_1 c_1 \\ \dot{c}_4 = 2k_2 c_1^2 \end{cases}, \tag{11}$$

здесь $t \ge 0$, $c_i (i = 1,..,4)$, – концентрации веществ $C_2H_6, C_2H_4, H_2, CH_4$ соответственно, $k_1 > 0,\ k_2 > 0$ – константы скоростей химических реакций. Так как концентрации c_i

представляют собой неотрицательные величины, то поведение решений системы достаточно рассматривать при $c_i \geq 0$. Для системы (11) ставится задача определения положения равновесия по заданным начальным концентрациям

$$c_1(0) = c_1^{(0)}, c_2(0) = c_2^{(0)}, c_3(0) = c_3^{(0)}, c_4(0) = c_4^{(0)}.$$

Приравнивая правую часть системы (8) к нулю, находим, что положения равновесия образуют множество векторов вида

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \text{ где } c_i \in R_+^1,\ i = 2,3,4. \qquad (12)$$

Фиксируя некоторые $c_i \neq 0,\ (i = 2,3,4)$ и используя определения локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности, исследуем на устойчивость по части переменных ненулевое положение равновесия $c^* = colon(0, c_2^*, c_3^*, c_4^*)$, а также асимптотику решений системы (11) в окрестности этого положения равновесия.

Для этого в системе (11) сделаем замену переменных

$$c = x + c^*. \qquad (13)$$

Тогда система (11) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 - 2k_2 x_1^2 \\ \dot{x}_2 = k_1 x_1 + k_2 x_1^2 \\ \dot{x}_3 = k_1 x_1 \\ \dot{x}_4 = 2k_2 x_1^2 \end{cases}. \qquad (14)$$

Заметим, что вид систем (11) и (14) совпадает. Таким образом, задача сводится к исследованию асимптотики поведения решений в окрестности тривиального решения $x \equiv 0$ системы (14).

Так как матрица линейного приближения

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -k_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = k_1 y_1 \\ \dot{y}_3 = k_1 y_1 \\ \dot{y}_4 = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

системы (14) имеет одно отрицательное и три нулевых собственных значений кратности 1, то нулевое решение системы (15) является устойчивым. Вместе с тем согласно [22] имеет место критический случай, и, следовательно, теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [1] неприменима.

Исследуем устойчивость по части переменных нулевого положения равновесия системы (14) на основании локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру.

Используя определение 3, установим соответствие между начальными значениями $x_1(0)=x_1^{(0)}$, $x_2(0)=x_2^{(0)}$, $x_3(0)=x_3^{(0)}$, $x_4(0)=x_4^{(0)}$ решений

$$
\begin{aligned}
&x_1(t:0,x^{(0)})=\frac{k_1x_1^{(0)}e^{-k_1t}}{k_1+2k_2x_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})},\\
&x_2(t:0,x^{(0)})=x_2^{(0)}+\frac{k_1}{4k_2}\ln\left(1+2\frac{k_2}{k_1}x_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})\right)+\frac{x_1^{(0)}}{2}\left(\frac{(1-e^{-k_1t})(k_1+2k_2x_1^{(0)})}{k_1+2k_2x_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})}\right),\\
&x_3(t:0,x^{(0)})=x_3^{(0)}+\frac{k_1}{2k_2}\ln\left(1+2\frac{k_2}{k_1}x_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})\right),\\
&x_4(t:0,x^{(0)})=x_4^{(0)}-\frac{k_1}{2k_2}\ln\left(1+2\frac{k_2}{k_1}x_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})\right)+x_1^{(0)}\left(\frac{(1-e^{-k_1t})(k_1+2k_2x_1^{(0)})}{k_1+2k_2x_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})}\right),
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

нелинейной системы (14) и начальными значениями $y_1(0)=y_1^{(0)}$, $y_2(0)=y_2^{(0)}$, $y_3(0)=y_3^{(0)}$, $y_4(0)=y_4^{(0)}$ решений

$$
\begin{aligned}
&y_1(t:0,y^{(0)})=y_1^{(0)}e^{-k_1t}\\
&y_2(t:0,y^{(0)})=y_2^{(0)}+y_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})\\
&y_3(t:0,y^{(0)})=y_3^{(0)}+y_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})\\
&y_4(t:0,y^{(0)})=y_4^{(0)}
\end{aligned},
\qquad (17)
$$

линейной системы (15).

Для этого определим отображения $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ из условий

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x_i(t)-y_i(t)}{\mu_i(t)}=0,\ i=\overline{1,4},$$

где в качестве функций $\mu_i(t)$ выбраны следующие:

$$\mu_1(t)=e^{-k_1t},\ \mu_2(t)=\mu_3(t)=\mu_4(t)=1-e^{-k_1t}. \qquad (18)$$

Имеем

$$y_1^{(0)}=P_1^{(2)}x_1^{(0)}\equiv\frac{k_1x_1^{(0)}}{k_1+2k_2x_1^{(0)}},$$

$$y_2^{(0)} = P_2^{(2)} x_1^{(0)} \equiv x_2^{(0)} + \frac{k_1}{4k_2} \ln\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}\right) - \frac{x_1^{(0)}}{2}\left(\frac{k_1 - 2k_2 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}}\right), \qquad (19)$$

$$y_3^{(0)} = P_3^{(2)} x_1^{(0)} \equiv x_3^{(0)} + \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}\right) - \left(\frac{k_1 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}}\right),$$

$$y_4^{(0)} = P_4^{(2)} x_1^{(0)} \equiv x_4^{(0)} - \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}\right) + x_1^{(0)},$$

$$P^{(2)} = colon(P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}, P_4^{(2)}) \ .$$

Обратное отображение $P^{(1)^{-1}}$ имеет вид

$$x_1^{(0)} = P_1^{(1)} y_1^{(0)} \equiv \frac{k_1 y_1^{(0)}}{k_1 - 2k_2 y_1^{(0)}},$$

$$x_2^{(0)} = P_2^{(1)} y_2^{(0)} \equiv y_2^{(0)} + \frac{k_1}{4k_2} \ln\left(1 - 2\frac{k_2}{k_1} y_1^{(0)}\right) + y_1^{(0)}\left(\frac{k_2 y_1^{(0)}}{k_1 - 2k_2 y_1^{(0)}}\right), \qquad (20)$$

$$x_3^{(0)} = P_3^{(1)} y_3^{(0)} \equiv y_3^{(0)} + y_1^{(0)} + \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 - 2\frac{k_2}{k_1} y_1^{(0)}\right),$$

$$x_4^{(0)} = P_4^{(1)} y_4^{(0)} \equiv y_4^{(0)} + 2y_1^{(0)} - \frac{k_1}{2k_2} \ln\left(1 - 2\frac{k_2}{k_1} y_1^{(0)}\right) - \frac{k_1 y_1^{(0)}}{k_1 - 2k_2 y_1^{(0)}},$$

$$P^{(1)} = colon(P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, P_4^{(1)}).$$

Тогда, области V и U могут быть построены следующим образом:

$$V = V_1 \times V_3 \times V_3 \times V_4,\ V_1 = \left(-\infty, \frac{k_1}{2k_2}\right),\ V_i = \left(0, +\infty\right),\ i = \overline{2,4},$$

$$U = U_1 \times U_3 \times U_3 \times U_4,\ U_1 = \left(-\frac{k_1}{2k_2}, +\infty\right),\ U_i = \left(-\frac{k_1}{2k_2}, +\infty\right),\ i = \overline{2,4}.$$

Величины $\delta_i(t : t_0, x^{(0)}),\ i = \overline{1,4},$ имеют вид

$$\delta_1(t : t_0, x^{(0)}) = \frac{k_1 x_1^{(0)} e^{-k_1 t}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t})};$$

$$\delta_2(t : t_0, x^{(0)}) = \frac{k_1}{4k_2 (1 - e^{-k_1 t})} \ln\left[\frac{1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t})}{1 + 2\frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}}\right] +$$

$$+ \frac{x_1^{(0)}}{2}\left(\frac{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})^2 + (k_1 - 2k_2 x_1^{(0)})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t}))}{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t}))}\right);$$

$$\delta_3(t:t_0,x^{(0)})=\frac{k_1}{2k_2(1-e^{-k_1t})}\ln\left[\frac{1+2\frac{k_2}{k_1}x_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})}{1+2\frac{k_2}{k_1}x_1^{(0)}}\right]+\frac{k_1x_1^{(0)}e^{-k_1t}}{(k_1+2k_2x_1^{(0)})(1-e^{-k_1t})};$$

$$\delta_4(t:t_0,x^{(0)})=-\frac{k_1}{2k_2(1-e^{-k_1t})}\ln\left[\frac{1+2\frac{k_2}{k_1}x_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})}{1+2\frac{k_2}{k_1}x_1^{(0)}}\right]+x_1^{(0)}\left(\frac{k_1+2k_2x_1^{(0)}}{k_1+2k_2x_1^{(0)}(1-e^{-k_1t})}-\frac{1}{1-e^{-k_1t}}\right),$$

и удовлетворяют условиям (6) теоремы (1).

Заметим, что системы (14) и (15) не удовлетворяют определению асимптотической эквивалентности в смысле работ [11–13], так как области определения отображений $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ не совпадают со всем пространством R^n, и, следовательно, во всем пространстве R^n не существует отображений, переводящих начальные данные одной системы в начальные данные другой, так чтобы норма разности соответствующих решений стремилась к нулю при $t\to\infty$.

Так как $P^{(1)}=P^{(2)^{-1}}$, то системы (14) и (15) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Левинсону в смысле определения 3.

Учитывая, что отображения $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ непрерывны в нуле, получаем, что все условия теоремы 1 выполнены.

Так как нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво по первой компоненте, а ненулевые решения имеют асимптотическое равновесие по остальным компонентам, то на основании теоремы 1 можно сделать вывод, что этими же свойствами обладают решения системы (14) в окрестности нулевого положения равновесия.

Учитывая замену переменных (13), можно сделать следующие выводы об асимптотическом поведении решений системы (11) в окрестности положения равновесия $c*$:

1) каждое положение равновесия $c*$ системы (11) является асимптотически устойчивым по компоненте c_1;
2) решения системы (8), начинающиеся в окрестности положения равновесия $c*$, имеют асимптотическое равновесие по компонентам c_2,c_3,c_4, причем при $t\to+\infty$ эти решения стремятся к нему.

Поведение решений асимптотически эквивалентных систем в окрестности положения равновесия. Так как правые части систем (11) и (14) совпадают, то из асимптотической эквивалентности систем (14) и (15) следует асимптотическая эквивалентность систем (11) и (15). Тогда формулы (19) и (20) остаются справедливыми, если $x_i^{(0)}$ заменить на $c_i^{(0)}$.

Построим графики решений для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных по Левинсону систем (11) и (15) относительно некоторых функций (18), с начальными данными, связанными отображениями $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ согласно формулам (16) и (17), где $x_i^{(0)}$ заменены на $c_i^{(0)}$. В качестве начальных значений решений выбраны $c_1^{(0)}=1,\ c_2^{(0)}=c_3^{(0)}=c_4^{(0)}=0$ и $y_1^{(0)}\approx 0.78,\ y_2^{(0)}\approx 0.16$, $y_3^{(0)}\approx 0.1$, $y_4^{(0)}\approx 0.12$. Графики построены для $k_1=0.51$, $k_2=0.07$, что соответствует протеканию брутто-реакции пиролиза этана при постоянной температуре $800K$.

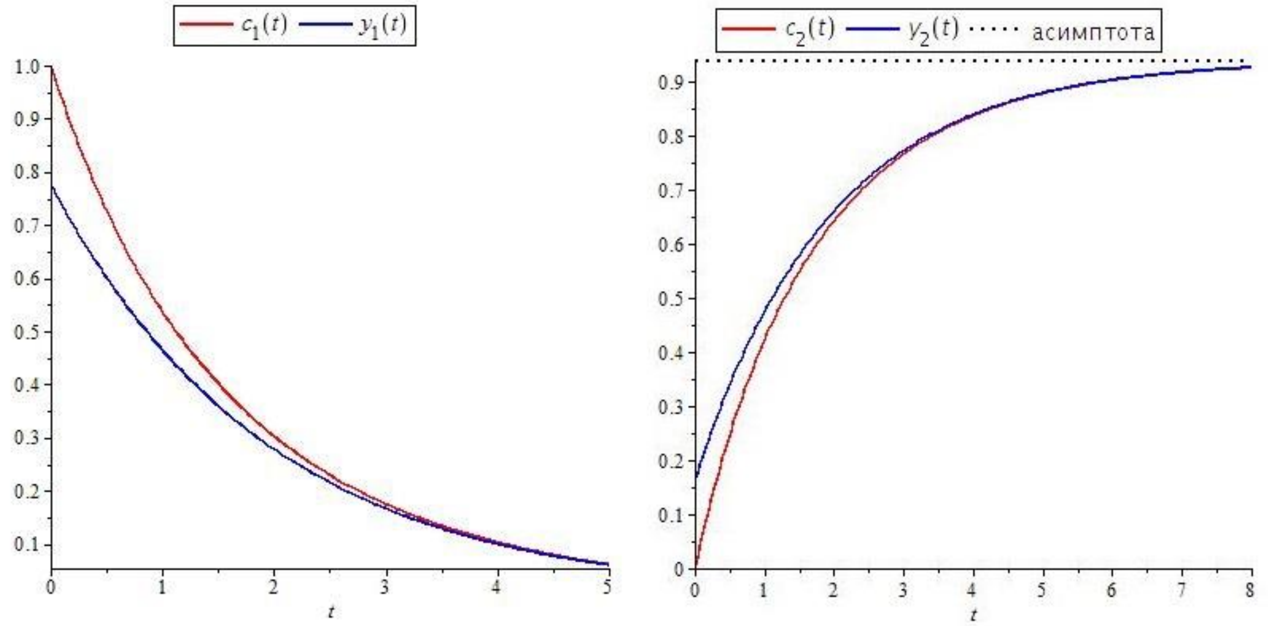

Рис. 1. Графики решений c_i и x_i, $i=\overline{1,2}$, между начальными значениями которых установлено взаимно-однозначное соответствие.

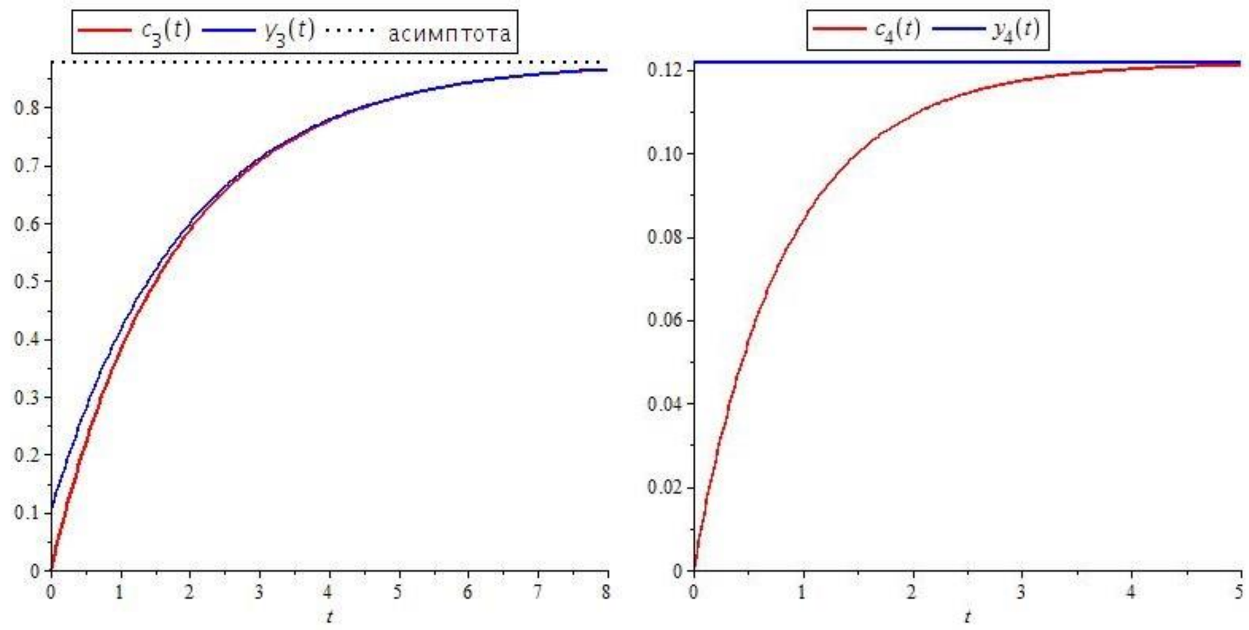

Рис. 2. Графики решений c_i и x_i, $i = \overline{3,4}$, между начальными значениями которых установлено взаимно-однозначное соответствие.

Положения равновесия для решений с вышеприведенными начальными значениями систем (11) и (15) совпадают и находятся по формулам

$$\lim_{t\to\infty} c_1(t:0, x^{(0)}) = \lim_{t\to\infty} y_1(t:0, y^{(0)}) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} c_2(t:0, x^{(0)}) = \lim_{t\to\infty} y_2(t:0, y^{(0)}) \approx 0.94,$$

$$\lim_{t\to\infty} c_3(t:0, x^{(0)}) = \lim_{t\to\infty} y_3(t:0, y^{(0)}) \approx 0.88,$$

$$\lim_{t\to\infty} c_4(t:0, x^{(0)}) = \lim_{t\to\infty} y_4(t:0, y^{(0)}) \approx 0.12.$$

Заключение. Таким образом, на основании локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности для системы (11) определено положение асимптотического равновесия по заданным начальным концентрациям и исследована асимптотика поведения решений в его окрестности. Из проведенных исследований можно сделать вывод, что исследуемая система обладает свойством полиустойчивости по части переменных [23; 24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.

2. Brauer F. Asymptotic equivalence and asymptotic behavior of linear systems // Michigan Math. J. – 1962. – Vol. 9. – pp. 33-43.
3. Levinson N. The asymptotic behaviour of a system of linear differential equations // Amer. J. Math. – 1946. – Vol. 63. – pp. 1–6.
4. Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. – 1948. – Vol. 15. – pp. 111–126.
5. Wintner A. Linear variation of constants // Am. J. Math. – 1946. – Vol. 68. – pp. 417–430.
6. Brauer F., Nohel J. A. The qualitative theory of ordinary differential equations. – New York: W. A. Benjamin, 1969. – 313 p.
7. Onuchic N. Relationship among the solutions of two systems of ordinary differential equations// Michigan Math. J. – 1963. – Vol. 10. – P. 129-139.
8. Onuchic N. Nonlinear perturbation of a linear system of ordinary differential equations // Michigan Math. J. – 1964. – Vol. 11. – pp. 237–242.
9. Onuchic N. Asymptotic relationship at infinity between the solutions of two systems of ordinary differential equations // J. Differential Eqs. 3. – 1967. – pp. 47–58.
10. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
11. Качественные и асимптотические методы интегрирования дифференциальных уравнений / Воскресенский Е. В., Артемьева Е. Н., Белоглазов В. А., Мурюмин С. М.; под ред. Н.А. Лукашевича. – Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, Саран. фил., 1988. – 188 с.
12. Воскресенский Е. В. Методы сравнения в нелинейном анализе. – Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – 224 с.
13. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. – Саранск: СВМО, 2000. – 300 с.
14. Мамедова Т. Ф. Асимптотические методы для части компонент решений дифференциальных уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Н. Новгород, 1993. –14 с.
15. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Об исследовании динамических моделей социально-экономических систем на устойчивость по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 152–157.

16. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., Десяев Е. В. Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 30–36.
17. Язовцева О. С., Мамедова Т. Ф., Губайдуллин И. М. Исследование устойчивости некоторого решения системы кинетических уравнений химической реакции // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 4. – С. 152–158.
18. Якубович В. А. Об асимптотическом поведении решений системы дифференциальных уравнений // Матем. сб. – 1951. – Т. 28(70), № 1. – С. 217–240.
19. Мухина Т. Н., Барабанов Н. Л., Бабаш С. Е. и др. Пиролиз углеводородного сырья. – М.: Химия, 1987. – 240 с.
20. Губайдуллин И. М., Пескова Е. Е., Язовцева О. С. Математическая модель динамики многокомпонентного газа на примере брутто-реакции пиролиза этана [Электронный ресурс] // Огарев-online. – 2016. – № 20. – Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/matematicheskaya-model-dinamiki-mnogokomponentnogo-gaza-na-primere-brutto-reakcii-piroliza-etana.
21. Жалнин Р. В., Пескова Е. Е., Стадниченко О. А., Тишкин В. Ф. Математическое моделирование динамики многокомпонентного газа с использованием WENO схем на примере пиролиза этана // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 3. – С. 98–106.
22. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 533 с.
23. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 253 с.
24. Воротников В. В. Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности // Автомат. и телемех. – 1993. – № 3. – С. 3–62.