БОБРЕНЁВА Ю. О., ГУБАЙДУЛЛИН И. М., ЖАЛНИН Р. В.

НЕЯВНАЯ СХЕМА НА ОСНОВЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ[1]

Аннотация. В работе для моделирования температурного поля в системе «скважина-трещина-пласт» предложена неявная схема, основанная на разрывном методе Галёркина. Рассматривается двумерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами, равными единице. Получены выражения для определения элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: разрывный метода Галёркина, неявная схема, термометрия, РМГ, DG.

BOBRENEVA YU. O., GUBAYDULLIN I. M., ZHALNIN R. V.

IMPLICIT SCHEME BASED ON DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR MODELING TEMPERATURE IN OIL RESERVOIR

Abstract. The implicit scheme is developed to simulate the temperature in the "well-fracture-layer" system. The scheme is based on the discontinuous Galerkin method. The two-dimensional heat conduction equation with constant coefficients equal to unity is considered. The expressions to determine matrix elements of the system of linear equations are obtained.

Keywords: discontinuous Galerkin method, implicit scheme, thermometry, DG.

При гидродинамических исследованиях скважин, особенно для скважин с гидравлическим разрывом пласта [1], необходимо совместное рассмотрение гидродинамического состояния системы «скважина-пласт» с температурным полем, или термометрией. Термометрия исторически является первым методом исследования скважин. Основным параметром, который несет информационную нагрузку в данном методе, является температура. Профиль температуры зависит от скорости фильтрации, градиента давления, а также свойств жидкости и породы [2; 3]. Для детального изучения термогидродинамических процессов в пласте со скважиной необходима разработка эффективного вычислительного алгоритма для численного моделирования совместной работы системы «скважина-трещина-пласт» [4]. Как известно, процессы теплопередачи описываются уравнениями параболического типа. При этом для использования алгоритмов сквозного счета необходимо строить сетки, имеющие достаточно мелкие ячейки в области, соответствующей трещине. Это накладывает существенные ограничения на шаг дискретизации по времени и, тем

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-31-50018 мол_нр).

самым, требует большого числа итераций. Поэтому возникает необходимость построения неявных схем, для которых такое ограничение отсутствует.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in G, t > 0, u = u(t, x, y); \tag{1}$$

$$u = \varphi(x, y), (x, y) \in \partial G, t > 0; u|_{t=0} = \psi(x, y). \tag{2}$$

Для дискретизации разрывным методом Галеркина запишем (1) в виде системы уравнений [5]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{dt} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0, \\ &q_x + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ &q_y + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Покроем рассматриваемую область треугольной сеткой и введем в каждом треугольнике Δ_i систему базисных функций

$$\{\varphi_m^i\} \subset P^K(x, y), \tag{4}$$

$m = 0, \dots, N-1, N = \frac{(K+2)(K+1)}{2}, P^K(x, y)$ – пространство полиномов степени не выше K.

Решение системы (3) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u^i(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i(t) \varphi_l^i(x, y), \\ q_x^i(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i(t) \varphi_l^i(x, y), \\ q_y^i(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i(t) \varphi_l^i(x, y). \end{aligned} \tag{5}$$

Найдем проекцию уравнений (3) на пространство кусочно-непрерывных полиномов с базисом (4). Для этого подставим (5) в (3) и умножим скалярно каждое уравнение на базисную функцию:

$$\int_{\Delta_i} \frac{\partial u^i}{\partial t} \varphi_m^i \, dx\, dy + \int_{\Delta_i} \left(\frac{\partial q_x^i}{\partial x} + \frac{\partial q_y^i}{\partial y}\right) \varphi_m^i \, dx\, dy = 0$$

$$\int_{\Delta_i} q_x^i \, \varphi_m^i \, dx\, dy + \int_{\Delta_i} \frac{\partial u^i}{\partial t} \varphi_m^i \, dx\, dy = 0,$$

$$\int_{\Delta_i} q_y^i \, \varphi_m^i \, dx\, dy + \int_{\Delta_i} \frac{\partial u^i}{\partial y} \varphi_m^i \, dx\, dy = 0.$$

После преобразований получим

$$\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\partial u_l^i}{\partial t} \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \, \varphi_m^i \, dx\, dy + \oint_{\partial \Delta_i} (\widehat{q_x^\iota} \cdot n_x + \widehat{q_y^\iota} \cdot n_y) \varphi_m^i \, d\gamma \; -$$

$$- \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} dxdy - \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} dxdy = 0,$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \, \varphi_m^i \, dx\, dy + \oint_{\partial \Delta_i} (\widehat{u^\iota} \cdot n_x \varphi_m^i \, d\gamma \; - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} dxdy = 0\,,$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \, \varphi_m^i \, dx\, dy + \oint_{\partial \Delta_i} (\widehat{u^\iota} \cdot n_y \varphi_m^i \, d\gamma \; - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} dxdy = 0.$$

Дискретизацию по времени выполним по неявной схеме. Значения на границе ячеек положим равным полусумме значений из ячеек, которые разделяет данное ребро. Окончательно получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \, \varphi_m^i \, dx\, dy + \\
&+ \sum_{k \in neigh(\Delta_i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \, \varphi_m^i d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^k n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \, \varphi_m^i d\gamma + \right. \\
&\left. + \sum_{i=0}^{N-1} q_{yl}^i n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \, \varphi_m^i d\gamma + \sum_{i=0}^{N-1} q_{yl}^k n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \, \varphi_m^i d\gamma \right) - \\
&- \sum_{i=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} dxdy - \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} dxdy = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} \breve{u}_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \, \varphi_m^i \, dx\, dy,
\end{aligned} \qquad (6)$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^{i} \int\limits_{\Delta_i} \varphi_l^i \, \varphi_m^i \, dx \, dy + \\
+ \sum_{k \in neigh(\Delta_i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} u_l^i n_x \int\limits_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \, \varphi_m^i d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} u_l^k n_x \int\limits_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \, \varphi_m^i d\gamma \right) - \\
- \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int\limits_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} dx dy = 0,
\end{gathered} \tag{7}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^{i} \int\limits_{\Delta_i} \varphi_l^i \, \varphi_m^i \, dx \, dy + \\
+ \sum_{k \in neigh(\Delta_i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} u_l^i n_y \int\limits_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \, \varphi_m^i d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} u_l^k n_y \int\limits_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \, \varphi_m^i d\gamma \right) - \\
- \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int\limits_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} dx dy = 0.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Здесь neigh (Δ_I) – множество номеров соседних ячеек ячейки Δ_i; γ_{ik} – ребро между ячейками с номерами i и k; $\breve{u}^i$ – значение на предыдущем слое по времени.

Таким образом, получили систему линейных алгебраических уравнений:

$$
Ay = b, \tag{9}
$$

где матрица A – состоит из блоков размера 3N x 3N, столбец y состоит из блоков y^i, а столбец b – из блоков b^i, соответствующих i –ой ячейке сетки:

$$
y = \begin{pmatrix} u_0^i \\ \vdots \\ u_{N-1}^i \\ q_{x0}^i \\ \vdots \\ q_{xN-1}^i \\ q_{y0}^i \\ \vdots \\ q_{yN-1}^i \end{pmatrix}, \quad
b^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} \breve{u}_l^i \int\limits_{\Delta_i} \varphi_l^i \, \varphi_0^i \, dx \, dy \\ \vdots \\ \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} \breve{u}_l^i \int\limits_{\Delta_i} \varphi_l^i \, \varphi_{N-1}^i \, dx \, dy \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},
$$

где $i = 0, \ldots M-1, M$ – количество ячеек расчетной сетки.

Для решения системы (9) можно воспользоваться библиотекой HYPRE [6,7].

Таким образом, предложен вычислительный алгоритм, основанный на неявной схеме для разрывного метода Галёркина, предназначенный для моделирования температурных полей в системе «скважина-трещина-пласт». Неявная схема позволяет проводить расчеты с временным шагом, ограниченным только условием требуемой точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малышев А. Г. и др. Анализ влияния технологических факторов и механических свойств горных пород на эффективность ГРП // Нефть Сургута. – М.: Нефтяное хозяйство, 1997. – С. 224-237.

2. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1965. – 238 с.

3. Рамазанов А. Ш., Нагимов В. М. Аналитическая модель для расчета температурного поля в нефтяном пласте при нестационарном притоке жидкости // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2007. – № 1. – С. 1–9.

4. Губайдуллин И. М., Линд Ю. Б., Коледина К. Ф. Методология распараллеливания при решении многопараметрических обратных задач химической кинетики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13, № 2 (26). – С. 28–36.

5. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Панюшкина Е. Н. О применении разрывного метода Галеркина для численного решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6. – С. 874.

6. Falgout K. B., Yang U. M. Hypre: a Library of High Performance Preconditioners // Computational Science / P.M.A. Sloot, C.J.K. Tan. JJ Dongarra, A.G. Hoekstra (Eds.). – Springer-Verlag, 2002. – Vol. 2331. – P. 632–641.

7. Falgout R. D., Jones J. E., Yang U. M. The Design and Implementation of hypre, a Library of Parallel High Performance Preconditioners // Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers / A.M. Bruaset, A. Tveito (Eds.). – Springer-Verlag, 2006. – Vol. 51. – P. 267–294.