ТАЛАНОВА Е. А., ТАЛАНОВА Г. Н.

ПЛОТНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕЕ РОЛЬ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ[1]

Аннотация. В 1930 году советский ученый Л. Г. Шнирельман впервые начал рассматривать плотность последовательности как меру «густоты» числовых последовательностей. Тем самым многие классические задачи теории чисел получили более изящные формулировки и доказательства. В данной работе рассматривается понятие плотности последовательности, доказываются основные его свойства. Также приводятся примеры, которые иллюстрируют вычисление плотности последовательности.

Ключевые слова: последовательность, плотность последовательности, теория чисел, простое число.

TALANOVA E. A., TALANOVA G. N.

SEQUENCE DENSITY AND ITS ROLE IN NUMBER THEORY

Abstract. In 1930 the Soviet scientist L. G. Shnirelman first began to consider the sequence density a measure of "density" of numerical sequences. Consequently, many of the classic problems of the number theory got more elegant formulations and proofs. This paper considers the concept of sequence density and proves its basic properties. The examples illustrating the sequence density calculation are included.

Keywords: sequence, sequence density, number theory, prime number.

Введение. Как известно, многие утверждения теории чисел при всей изящности формулировки имеют громоздкое и, зачастую, трудное доказательство. Например, теорема Лагранжа о возможности представить всякое натуральное число в виде суммы четырех квадратов целых чисел, или результат Виноградова о том, что любое достаточно большое нечетное число может быть представлено в виде суммы трех простых [1, с. 14]. В 1930 году советский математик Л. Г. Шнирельман впервые связал эти и некоторые другие результаты с так называемой «густотой» последовательности чисел [2, с. 17]. В качестве мерки «густоты» он предложил плотность последовательности. Были описаны ее свойства, выведена связь между плотностью суммы последовательностей и плотностями последовательностей-слагаемых. Новый объект и его интересные свойства позволили более удобно формулировать некоторые классические утверждения теории чисел. В приведенных выше примерах, таким образом, устанавливается, что сумма определенного числа

[1] Авторы благодарят О. В. Починку, д.ф.-м.н., профессора, заведующую кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород) за полезные обсуждения.

последовательностей представляет собой последовательность, охватывающую целиком или почти целиком некоторый класс чисел (все натуральные числа, все достаточно большие нечетные числа).

Методы, основанные на понятии плотности последовательности, имеют важное значение в прикладных областях теории чисел, таких как алгоритмической теории чисел и криптографии. В частности, в нахождении всех простых чисел, меньших определенной границы, или построении чисел, не имеющих больших простых факторов. В других приложениях необходимо исследовать время работы нескольких алгоритмов факторизации, которое напрямую зависит от распределения простых чисел вида $2p+1$, p – простое число. В этом случае методы, основанные на понятии плотности последовательности, могут уменьшить продолжительность работы этих алгоритмов.

В данной работе доказываются некоторые свойства плотности последовательности и в качестве иллюстрации приводится несколько примеров вычисления плотности числовых последовательностей.

1. Определение плотности последовательности. Обозначим $X \subset \mathbb{R}$ - подмножество действительных чисел, $x \in X$ - элементы множества X. Напомним определение точной нижней грани множества.

Определение 1 . Число B называется точной нижней гранью множества X, если:

1) для любого $x \in X$, $x \geq B$,

2) для любого ε>0 существует $x \in X$ такой, что $x < B + \varepsilon$ [3, с. 39].

Обозначим inf X - точную нижнюю грань множества X.

Пусть $0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - числовая последовательность (A), в которой все $a_n \in \mathbb{N}$, и $a_n < a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Обозначим $A(n)$ – число натуральных чисел последовательности (A), непревосходящих n (нуль при этом не считается), так что $0 \leq A(n) \leq n$, вследствие чего $0 \leq \frac{A(n)}{n} \leq 1$. Дробь $\frac{A(n)}{n}$, которая для разных n имеет разные значения, рассматривается как средняя плотность последовательности (A) на отрезке натурального ряда от 1 до n. Точную нижнюю грань всех значений этой дроби Л.Г. Шнирельман предложил назвать плотностью последовательности (A).

Определение 2. Плотностью числовой последовательности (A) называется $inf\,\frac{A(n)}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$ [2, с. 18]. Обозначать эту плотность было предложено $d(A)$.

2. Свойства плотности последовательности. Приведем основные свойства плотности последовательности и докажем некоторые из них.

Свойство 1. Если $a_1 > 1$, то $d(A) = 0$.

Свойство 2. Если последовательность, начиная с a_1, есть арифметическая прогрессия с первым членом 1 и разностью r, то $d(A) = \frac{1}{r}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $(A) = \{0;\ 1;\ 1 + r;\ 1 + 2r;\ \dots;\ 1 + kr; \dots, k \in \mathbb{N}\ \}$ и последовательность дробей $(A_n) = \left\{\frac{A(n)}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Последовательность (A_n) имеет вид $\left\{1;\ \frac{1}{2};\frac{1}{3};\dots;\frac{1}{r-1};\frac{1}{r};\frac{2}{1+r};\frac{2}{r+2};\dots;\frac{2}{2r-1};\frac{1}{r};\frac{3}{1+2r};\frac{3}{2r+2};\dots;\frac{3}{3r-1};\frac{1}{r};\dots;\frac{n+1}{1+nr};\dots\right\}$.

Докажем по определению, что $inf A_n = \frac{1}{r}$. Для этого сравним члены последовательности (A_n) с $\frac{1}{r}$. $1 \geq \frac{1}{r}$ для любого r є ℕ; $\frac{1}{r-k} \geq \frac{1}{r}$ для r є ℕ, k є N, r>k.

Рассмотрим разность $\frac{n+1}{1+nr} - \frac{1}{r} = \frac{r(n+1)-(1+nr)}{(1+nr)r} = \frac{r-1}{(1+nr)r} \geq 0$ для r є ℕ, n є ℕ.

Значит $\frac{n+1}{1+nr} \geq \frac{1}{r}$ для r є N, n є ℕ. То есть, для любого $a_n \epsilon A_n$ верно неравенство $a_n \geq \frac{1}{r}$. Условие (1) определения 1 выполнено.

Теперь докажем, что для любого ε>0 существует nє ℕ такой, что и для любого $n_0 > n$, $a_{n_0} < \frac{1}{r}$ +ε.

Возьмем произвольное число ε>0 и выясним, при каких nє ℕ будет выполняться неравенство $a_n < \frac{1}{r}$ +ε.

Для $a_n = \frac{n+1}{1+nr}$; $\frac{n+1}{1+nr} < \frac{1}{r}$ +ε;$\frac{n+1}{1+nr} - \frac{1}{r}$<ε; $\frac{r-1}{(1+nr)r} < \frac{r-1}{nr^2} < \frac{r}{nr^2}$; $\frac{r}{nr^2} = \frac{1}{nr}$;$\frac{1}{nr}$ <ε. Значит, $n > \frac{1}{r\varepsilon}$. Возьмем $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{r\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\frac{1}{r\varepsilon}\right]$ - целая часть дроби $\frac{1}{r\varepsilon}$.

Таким образом, условие (2) определения 1 также выполнено. Следовательно, $d(A) = inf A_n = \frac{1}{r}$.

Свойство 3. Плотность всякой геометрической прогрессии равна нулю.

Доказательство. Пусть имеется последовательность $(A) = \{0;\ b;\ qb;\ q^2b;\ \dots;\ q^n b; \dots\}$. Рассмотрим последовательность дробей $(A_n) = \left\{\frac{A(n)}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. При $b > 1, q > 1$ дробь $\frac{A(1)}{1}$=0 и, значит, $inf A_n = d(A) = 0$.

При $b = 1, q > 1$ последовательность (A) имеет вид $\{0;\ 1;\ q;\ q^2;\ \dots;\ q^n; \dots\}$. Тогда (A_n) имеет вид $\left\{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\dots;\frac{1}{q-1};\frac{2}{q};\ \frac{2}{q+1};\dots;\ \frac{2}{q^2-1};\frac{3}{q^2};\frac{3}{q^2+1};\dots;\frac{n}{q^{n-1}};\frac{n}{q^{n-1}+1};\dots;\frac{n}{q^{n-1}+k};\dots\right\}$, где $1 \leq k \leq q^{n-1} - 1$. Докажем, что $inf a_n = 0$.

Очевидно, что все члены последовательности (A_n) положительны.

Найдем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что $a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Рассмотрим неравенство $a_n < \varepsilon$.

$a_n < \frac{n}{q^{n-1}} < \frac{n}{n^2}$.

$\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$; $\frac{1}{n} < \varepsilon$; значит $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве подходящего номера возьмем $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – целая часть дроби $\frac{1}{\varepsilon}$.

Итак, $inf A_n = d(A) = 0$.

Свойство 4. Плотность ряда последовательных квадратов равна нулю.

Доказательство. Ряд последовательных квадратов представляет собой последовательность $(A) = \{0;\ 1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ \dots;\ n^2; \dots\}$. Тогда $(A_n) = \left\{\frac{A(n)}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ имеет вид $\{1;\ \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{2^2}; \frac{2}{2^2+1} \dots; \frac{2}{3^2-1}; \frac{3}{3^2}; \frac{3}{3^2+1}; \dots; \frac{n-1}{n^2-1}; \frac{n}{n^2}; \dots; \frac{n}{n^2+k}; \dots\}$, где $0 \le k \le n^2 - 1$.т

Выясним, при каком номере $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ выполняется $a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Рассмотрим $\frac{n}{n^2+k} < \frac{n}{n^2}$; $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$; $\frac{1}{n} < \varepsilon$, значит $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Снова в качестве подходящего номера возьмем $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - целая часть дроби $\frac{1}{\varepsilon}$. Итак, $inf A_n = d(A) = 0$.

Свойство 5. Для того, чтобы последовательность (A) содержала весь натуральный ряд необходимо и достаточно, чтобы $d(A) = 1$.

Свойство 6. Если $d(A) = 0$, и (A) содержит число 1, то при любом ε>0 можно найти сколь угодно большое число N, для которого $A(N) < \varepsilon N$.

Доказательство. Пусть последовательность $(A) = \{0; 1; n_3;\ n_4; \dots; n_k; \dots\}$ и ее плотность $d(A) = 0$. Тогда $\frac{A(1)}{1} = 1$, $inf \frac{A(n)}{n} = 0$, то есть для любого малого ε>0 существует номер N такой, что $\frac{A(N)}{N} < \varepsilon$. Откуда $A(N) < \varepsilon N$ для достаточно больших N.

3. Примеры вычисления плотности последовательности. В качестве иллюстрации определения и свойств плотности последовательности найдем плотность множества пар вида: а) (3*n*-2, 4*k*-3), б) (2^n, 4*k*-3), где n и k независимо пробегают $\mathbb{N}^2$.

Решение: а) пары вида (3*n*-2, 4*k*-3) содержат члены арифметических прогрессий, начинающихся с 1. Плотность последовательности с общим членом 3*n*-2, согласно второму свойству, равна $\frac{1}{3}$. Плотность последовательности с общим членом 4*k*-3 равна $\frac{1}{4}$. Так как по условию n и k независимо пробегают $\mathbb{N}^2$, то плотность последовательности пар (3*n*-2, 4*k*-3) равна $\frac{1}{12}$;

б) пары вида (2^n , 4*k*-3) содержат члены геометрической прогрессии 2^n , для которой ранее было выяснено, что плотность ее равна 0 (свойство 3). Поэтому плотность последовательности пар (2^n, 4*k*-3) также равна 0.

При помощи свойств, доказанных в данной работе, был сделан вывод о том, что плотность суммы любых двух числовых последовательностей не меньше, чем сумма их плотностей, уменьшенная на произведение этих плотностей. Он носит название леммы Шнирельмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
2. Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. – М.: Наука, 2003. – 64 с.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах): учебник для студентов университетов и втузов. Т. I. – М.: Высш. школа, 1981. – 687 с.