

**КУРЕНКОВ Е. Д., ПОЧИНКА О. В.**

**ДИНАМИКА ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА РЁЛО<sup>1</sup>**

**Аннотация.** В работе исследовано однопараметрическое семейство траекторий движения точек треугольника Рёло, расположенных на его оси симметрии, при качении его по квадрату. Найдены все бифуркационные значения параметра, при прохождении через которые происходит качественное изменение траектории. Установлены компоненты, из которых состоят траектории, определено их количество и их уравнения. При всех значениях параметра, превышающих первое бифуркационное значение, рассчитано отношение площади фигуры, ограниченной замкнутой кривой, к площади описанного вокруг фигуры квадрата. Найдено лучшее приближение к квадрату.

**Ключевые слова:** треугольник Рёло, бифуркационные параметры, траектория.

**KURENKOV E. D., POCHINKA O. V.**

**DYNAMICS OF POINTS IN REULEAUX TRIANGLE**

**Abstract.** The paper studies a one-parametric family of trajectories of points in the Reuleaux triangle formed by its rolling within a square. The bifurcation values that determine the qualitative behavior of the trajectory are found. The trajectory components, their number and equations are determined. For all values that are greater than the first bifurcation value a ratio of an area of a figure's square bounded by the trajectory and its circumscribed square area is calculated. The best approximation to a square is found.

**Keywords:** Reuleaux triangle, bifurcation, trajectory.

**1. Введение и формулировка результатов.**

Фигуры постоянной ширины – это фигуры, способные вращаться внутри квадрата, одновременно касаясь всех его сторон [1]. Самая известная из таких фигур – треугольник Рёло (см. рис. 1). С помощью треугольника Рёло были созданы механизмы, использующие сложные виды движения, например: дрель Гарри Уаттса, позволяющая сверлить квадратные отверстия; роторно-поршневой двигатель Ванкеля; рейферные механизмы. Отверстия, сделанные сверлом Уаттса, отличаются от квадрата скругленными углами [3].

---

<sup>1</sup> Исследование проведено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект "Топологические методы в динамике", ТЗ-98) при частичной поддержке РФФИ (грант 15-01-03687-а, грант 16-51-10005-Ко\_а).

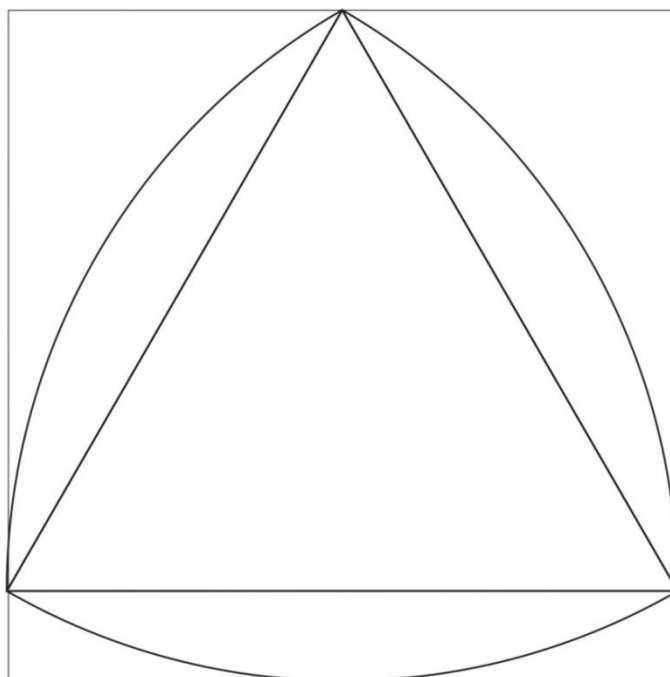


Рис. 1. Треугольник Рёло.

В ходе исследования были получены следующие результаты:

1) Получено уравнение траектории движения точек треугольника Рёло, лежащих на биссектрисе данного треугольника, при качении его по квадрату. А именно, пусть  $t$  – параметр, определяющий положение точки на биссектрисе треугольника Рёло, численно равный отношению расстояния от выбранной точки до центра треугольника к расстоянию от центра треугольника до его вершины. При этом точка может выходить за пределы треугольника. Было установлено, что в рассмотренном семействе существует 5 бифуркационных значений параметра  $t$ , при прохождении через которые качественно меняется форма траектории. При значениях параметра  $t \in (-\infty, t_5] \cup [t_1, +\infty)$  траектория является замкнутой кривой без самопересечений. При значениях  $t \in (t_5, t_4) \cup (t_2, t_1)$  траектория представляет из себя замкнутую кривую с 4 точками самопересечения. При значениях  $t = t_2, t_4$  траектория является замкнутой кривой с единственной точкой самопересечения. При значениях  $t \in (t_4, t_3) \cup (t_3, t_2)$  траектория имеет восемь точек самопересечения, а при  $t = t_3$  траектория точки совпадает с траекторией центра треугольника, которая является замкнутой кривой составленной из четырех дуг эллипсов, где  $t_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, t_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}, t_3 = 0, t_4 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-1}{2}, t_5 = -\frac{1}{2}$ .

2) При значении параметра  $t \geq t_1$  найдена площадь фигуры, ограниченной траекторией точки

$$S_f = t^2 \frac{\pi}{3} - t \left( \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \left( 2\sqrt{3} - \frac{8}{3} - \frac{\pi}{6} \right)$$

и площадь описанного вокруг нее квадрата

$$S_{sq} = 2 \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{t^2 + t + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

## 2. Доказательство основных результатов.

**Теорема 1.** При изменении параметра  $t$ , в рассмотренном семействе существует 5 бифуркационных значений, при прохождении через которые качественно меняется форма траектории.

**Доказательство.** Рассмотрим треугольник Рёло, катящийся в квадрате со стороной 1. Расположим данный квадрат в декартовой системе координат таким образом, чтобы одна из его вершин совпадала с началом координат, а противоположная ей вершина лежала на оси ординат в верхней полуплоскости (см. рис. 1).

Рассмотрим правильный треугольник  $\Delta ABC$ , вершины которого совпадают с вершинами треугольника Рёло. Пусть  $D$  – центр данного треугольника, а  $\alpha$  – угол между осью ординат и биссектрисой  $l$  треугольника  $\Delta ABC$ , проходящей через точку  $C$ .

Пусть  $P$  – точка, лежащая на прямой  $l$ , получаемая из точки  $D$  параллельным переносом на вектор  $t\overline{DC}$ , где  $t$  – любое действительное число. Найдём координаты точки  $P$ . Из соображений симметрии достаточно ограничиться значениями  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ .

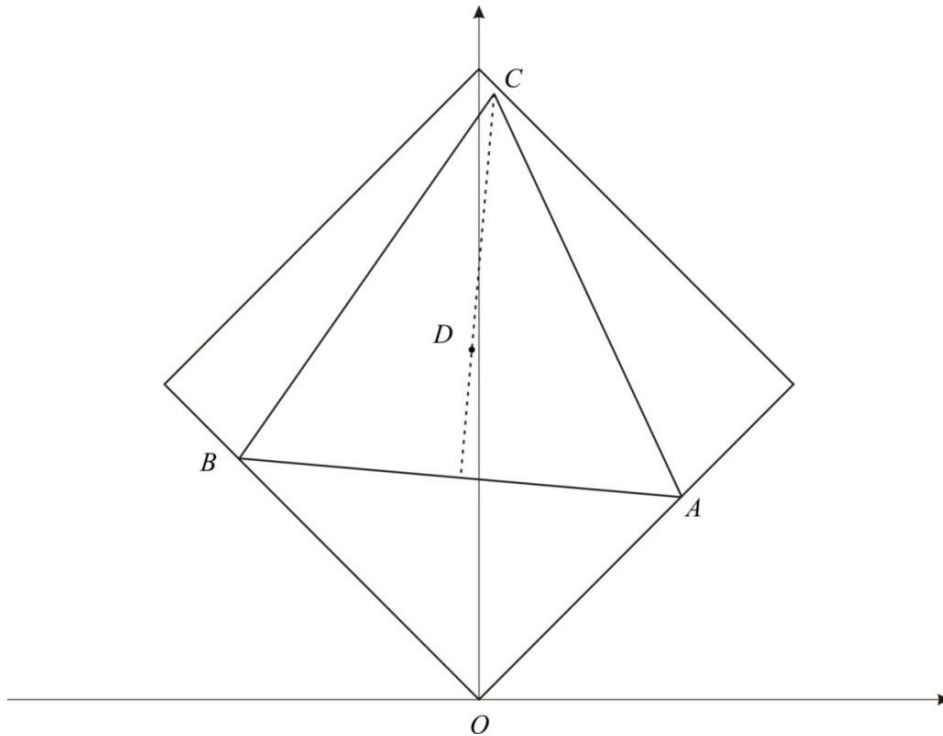


Рис. 2. Вершина  $C$  не касается стороны квадрата, а вершины  $A$  и  $B$  – касаются.

Возможны два случая:

- вершина  $C$  не касается стороны квадрата, а вершины  $A$  и  $B$  – касаются (см. рис. 2);
- вершины  $C$  и  $A$  касаются сторон квадрата, а вершина  $B$  – не касается (см. рис. 3).

Значения  $\alpha$ , при которых имеет тот или иной случай, определим чуть позже.

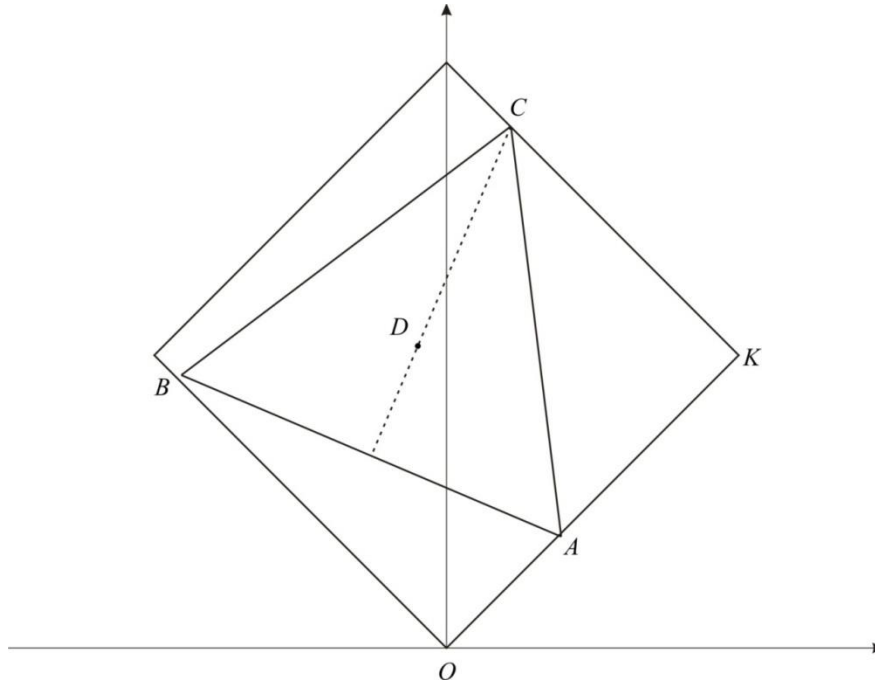


Рис. 3. Вершины  $C$  и  $A$  касаются сторон квадрата, а вершина  $B$  – не касается.

Рассмотрим случай 1. Рассмотрим треугольник  $\Delta OAB$ . Легко видеть, что  $|AB| = 1$ ,  $\angle ABO = \frac{\pi}{4} - \alpha$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ . Отсюда находим  $|OA| = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)$ ,  $|OB| = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha)$ . Теперь легко найти координаты точек  $C$  и  $D$ .

$$C = \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \right) \sin \alpha, \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha \right),$$

$$D = \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \right) \sin \alpha, \left( \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha \right).$$

Тогда координаты точки  $P$  имеют вид:

$$P = \left( \left( \frac{t\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \right) \sin \alpha, \left( \frac{t\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha \right).$$

Легко видеть, что при наибольшем значении  $\alpha$ , при котором имеет место случай 1, вершина  $C$  лежит на стороне квадрата. То есть точка  $P$  при значении параметра  $t = 1$  (при  $t = 1$   $P$  совпадает с  $C$ ) должна лежать на прямой  $x + y = \sqrt{2}$ .

Рассмотрим случай 2. Рассмотрим треугольник  $\Delta ACK$ . Легко видеть, что  $|AC| = 1$ ,  $\angle ACK = \frac{\pi}{12} + \alpha$ ,  $\angle CKA = \frac{\pi}{2}$ . Отсюда находим  $|AK| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cos \alpha + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \sin \alpha$ ,  $|CK| = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cos \alpha - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \sin \alpha$ . Теперь легко найти координаты точек  $C$  и  $D$ .

$$C = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos(\frac{\pi}{12} + \alpha)), \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \cos(\frac{\pi}{12} + \alpha)) \right),$$

$$D = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha), \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) \right).$$

Тогда координаты точки  $P$  имеют вид:

$$P = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) + \frac{t\sqrt{3}}{3} \sin \alpha, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) + \frac{t\sqrt{3}}{3} \cos \alpha \right).$$

Таким образом, уравнение траектории точки, лежащей на биссектрисе треугольника Рёло, имеет вид:

$$x(\alpha) = \begin{cases} \left( \frac{t\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \right) \sin \alpha, & \text{при } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) + \frac{t\sqrt{3}}{3} \sin \alpha, & \text{при } \frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \end{cases},$$

$$y(\alpha) = \begin{cases} \left( \frac{t\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha, & \text{при } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) + \frac{t\sqrt{3}}{3} \cos \alpha, & \text{при } \frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Отметим, что полученные уравнения описывают только одну восьмью всей траектории. Остальные участки траектории можно найти, воспользовавшись симметрией траектории относительно прямых  $x = 0$ ,  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y - x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Имея уравнение траектории, несложно найти все бифуркационные значения параметра  $t$ :  $t_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ,  $t_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ,  $t_3 = 0$ ,  $t_4 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-1}{2}$ ,  $t_5 = -\frac{1}{2}$ .

**Теорема 2.** Наибольшее значение отношения площади фигуры, ограниченной траекторией точки, к площади описанного вокруг нее квадрата при условии  $t_1 \leq t \leq 1$  достигается при значении параметра  $t = 1$ .

**Доказательство.** Площадь фигуры, ограниченной траекторией точки, имеет вид:

$$S_f = 8 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} y(\alpha) x'(\alpha) d\alpha - \int_0^{x(\frac{\pi}{4})} \left( t + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) dt \right].$$

Проделив необходимые вычисления получаем:

$$S_f = \frac{t^2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} - 3.$$

Для нахождения площади описанного вокруг фигуры квадрата достаточно найти касательную к вышеописанному участку траектории, имеющую вид  $x + y = c$ , где  $c$  – некоторая константа. Тогда площадь квадрата будет иметь вид  $S_{sq} = 2 \left( c - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$ .

Из условия  $\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{dy}{d\alpha}$  находим, что  $c = \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{t^2 + t + 1}$ . Тогда площадь квадрата имеет вид:

$$S_{sq} = 2 \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{t^2 + t + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2.$$

Теперь легко показать, что отношение  $\frac{S_f}{S_{sq}}$  достигает своего максимума на отрезке  $[t_1, 1]$  при  $t = 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Радермахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления. – М.: Физматгиз, 1962. – 263 с.
2. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. – М.-Л.: ГТТИ, 1951. – 343 с.
3. Smith S. G. Drilling Square Holes // Mathematics Teacher. – 1993. – Vol. 86, № 7. – P. 579–583.