

ЖАЛНИН Р. В., ПАНЮШКИНА Е. Н.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕВЯЗКОГО ГАЗА
С ПЕРЕНОСОМ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ПРИ ВЕТРОВОМ ПОДХВАТЕ**

Аннотация. Описана модель течения невязкого газа на основе системы уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности для концентрации загрязняющего вещества с граничным условием ветрового подхвата с поверхности земли. Также показаны результаты работы численного алгоритма, основанного на дискретизации полученных уравнений на структурированной сетке методом конечных объемов.

Ключевые слова: газовая динамика, уравнения Навье-Стокса, ветровой подхват, метод конечного объема.

ZHALNIN R. V., PANYUSHKINA E. N.

**SIMULATION OF NON-VISCOUS GAS FLOW
WITH POLLUTANT TRANSFER AT WIND GRAB**

Abstract. The paper describes a model of non-viscous gas flow through the system of Navier-Stokes equations and the continuity equation for the concentration of the pollutant with the boundary condition of the wind grab from the ground. The study includes the calculation results of a numerical algorithm based on sampling of the obtained equations on structured grid by the finite volume method.

Keywords: gas dynamics, Navier-Stokes equations, wind grab, finite volume method.

Введение. Для оценки и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций важную роль играет исследование динамики распространения загрязняющих веществ в атмосфере. При значительном загрязнении в большинстве случаев имеет место вторичная миграция примеси в результате ветрового подхвата с поверхности земли. В данной статье описано решение уравнений газовой динамики совместно с уравнением переноса примеси с граничным условием ветрового подхвата.

1. Математическая модель. Для описания вязких течений воспользуемся системой уравнений Навье-Стокса [2], которые отражают основные законы сохранения массы, импульса и энергии. В консервативной форме, в декартовых координатах ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) уравнения Навье-Стокса имеют вид:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

уравнения сохранения импульсов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho vu}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho wu}{\partial x} + \frac{\partial \rho wv}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E + up}{\partial x} + \frac{\partial \rho v E + vp}{\partial y} + \frac{\partial \rho w E + wp}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Здесь ρ , p , E – плотность, давление и полная энергия; u , v , w – компоненты вектора скорости. Полную энергию можно выразить через удельную внутреннюю энергию:

$$E = \varepsilon + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (4)$$

Система дополняется уравнением состояния:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \quad (5)$$

Предположим, что распространение примесей происходит только за счет ветрового переноса. Запишем уравнение неразрывности для концентрации загрязнений (смесь однокомпонентная) без учета физико-химических трансформаций [4]:

$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} + \frac{\partial \rho u C}{\partial x} + \frac{\partial \rho v C}{\partial y} + \frac{\partial \rho w C}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

При моделировании динамики распространения загрязнений рассмотрим ситуацию, когда примесь осела на землю, и ее дальнейшая миграция зависит от ветрового подхвата. Роль источника в этом случае будет выполнять сама поверхность, а ветровой подхват и дальнейший перенос будут в сильной степени зависеть от состояния этой поверхности. В общем случае решение задачи о вторичной миграции примеси невозможно. На практике вводятся такие эмпирические величины, как коэффициент ветрового подхвата, интенсивность ветрового подхвата и скорость сухого осаждения частиц [3].

К уравнению неразрывности для концентрации добавим краевое условие на подстилающей поверхности $z = 0$, описывающее изменение поверхностной концентрации за счет осаждения примеси из атмосферы и ветрового подхвата:

$$\frac{\partial C_r}{\partial t} = V_g C|_{z=0} - \alpha C_r \quad (7)$$

Здесь C_r – поверхностная концентрация примеси, α – коэффициент ветрового подхвата, V_g – скорость сухого осаждения частиц. Величины V_g и α зависят от свойств

примеси, характера подстилающей поверхности, состояния атмосферы и др. Поэтому их теоретическая и экспериментальная оценки достаточно трудоемки.

На остальных границах ставим условие вытекания. В начальный момент времени зададим поле скоростей (u_0, v_0, w_0) , давление p_0 , плотность ρ_0 и концентрацию C_0 .

2. Численный метод и результаты расчетов. Построение вычислительных алгоритмов основано на конечно-объемном методе. В этом методе исходные дифференциальные уравнения записываются в дивергентном виде в декартовых координатах и преобразуются с использованием формулы Остроградского-Гаусса к интегральному виду. Разностные формулы получаются в результате интегрирования исходных уравнений по контрольному объему. Аппроксимацию будем проводить на структурированной сетке с шагом h по всем направлениям. Все искомые параметры определяются в центре ячейки.

Исходную систему уравнений представим в векторной форме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

где вектора Q, F_x, F_y, F_z имеют вид

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \\ \rho C \end{pmatrix}, F_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uE + up \\ \rho uC \end{pmatrix}, F_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vE + vp \\ \rho vC \end{pmatrix}, F_z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho wE + wp \\ \rho wC \end{pmatrix} \quad (9)$$

Будем считать, что на границе области известны либо потоки, либо значения этих величин.

Проинтегрируем уравнение по объему ΔV_p ячейки p , которая ограничена поверхностью $\Sigma_p = \cup_{f=1}^E \Delta S_f$ (ΔS_f – площадь грани f). Используя формулу Остроградского-Гаусса, получим:

$$\int_{\Delta V_p} \frac{\partial Q}{\partial t} dV + \oint_{\Sigma_p} (F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z) dS = 0 \quad (10)$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V_p} Q dV + \oint_{\Sigma_p} \Phi dS = 0 \quad (11)$$

Используя квадратурные формулы, заменим интегральные выражения разностными. При интегрировании будем использовать теорему о среднем [1]. В качестве среднего значения функции по объему примем значение ее в центре ячейки, а в качестве среднего

значения функции на грани – значение ее в центре грани. Дискретный аналог уравнения следующий:

$$\frac{d}{dt}(Q\Delta V)_p + \sum_{f=1}^E \Phi \Delta S_f = 0 \quad (12)$$

Для нумерации ячеек будем использовать индексы i, j, k , грани ячейки обозначим $i \pm 1/2, j \pm 1/2, k \pm 1/2$ шаги по пространству и по времени обозначим h и τ . При аппроксимации производной разностью вперед получим следующую запись схемы:

$$\frac{Q_{ijk}^{n+1} - Q_{ijk}^n}{\tau} + \frac{1}{V_{ijk}} \left(\Phi_{i+1/2} S - \Phi_{i-1/2} S + \Phi_{j+1/2} S - \Phi_{j-1/2} S + \Phi_{k+1/2} S - \Phi_{k-1/2} S \right) = 0 \quad (13)$$

Численные потоки через грань f вычисляются по схеме Лакса-Фридрихса-Русанова:

$$\Phi_f = \frac{1}{2} \left(\Phi_f^- + \Phi_f^+ - K(Q_f^+ - Q_f^-) \right),$$

где $K = \max \left(\sqrt{(u^-)^2 + (v^-)^2 + (w^-)^2} + \sqrt{p^- \gamma / \rho^-}, \sqrt{(u^+)^2 + (v^+)^2 + (w^+)^2} + \sqrt{p^+ \gamma / \rho^+} \right)$.

Аппроксимация граничного условия, учитывающего ветровой подхват будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{C_{ij0}^{n+1} - C_{ij0}^n}{\tau} = V_g C_{ijk}^n - \alpha C_{ij0}^n \quad (14)$$

В качестве тестовой рассмотрим задачу в области $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ со следующими начальными данными (в безразмерных величинах):

$(u_0, v_0, w_0) = (1.0, 0.0, -0.7)$, $p_0 = 1.0$, $\rho_0 = 1.0$, $\gamma = 1.4$, $\alpha = 0.2e + 1$, $V_g = 0.7$, $h = 0.01$, $\tau = 1.e - 4$.

Примесь находится на поверхности $z = 0$, причем $C_0 = \begin{cases} 1, & x < 0.5 \\ 0, & x \geq 0.5 \end{cases}$

На рисунках 1 и 2 показано изменение концентрации с течением времени.

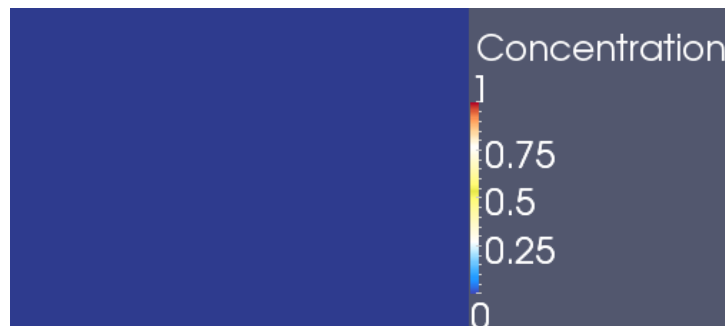


Рис.1. Концентрация примеси при $t=0$.

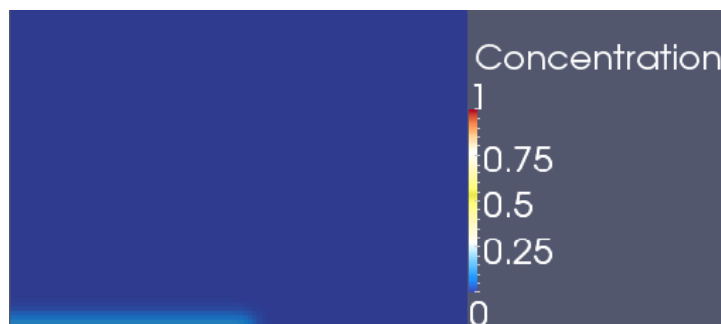


Рис.2. Концентрация примеси при $t=0.1$.

Заключение. В статье приведен численный расчет задачи распространения примеси с учетом ветрового подхвата на структурированной сетке совместно с решением уравнений Навье-Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
3. Нестеров А. В., Прус Ю. В. Моделирование вторичной миграции загрязнений в атмосфере при ветровом подхвате [Электронный ресурс] // Технологии техносферной безопасности. – 2009. – № 3. – Режим доступа: <http://agps-2006.narod.ru/ttb/2009-3/06-03-09.ttb.pdf>.
4. Панюшкина Е. Н. Описание математической модели переноса радиоактивных примесей по воздуху и подземными водами // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 116–118.