КОЗЛОВ М. В.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ СКОРОСТЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МАЛЫМИ ИНЕРЦИОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Аннотация. Рассматривается задача о предельной ограниченности обобщенных скоростей механических систем с полным набором сил и малыми инерционными характеристиками. Задача сводится к исследованию системы уравнений Лагранжа второго рода с большим положительным параметром. Получены оценки области предельной ограниченности, а также времени переходного процесса.

Ключевые слова: предельная ограниченность, уравнения Лагранжа второго рода, диссипативные силы, большой параметр.

KOZLOV M. V.

ULTIMATE BOUNDEDNESS OF GENERALIZED VELOCITIES OF MECHANICAL SYSTEMS WITH LOW INERTIA CHARACTERISTICS

Abstract. The article deals with the problem of ultimate boundedness of generalized velocities of mechanical systems with the complete set of forces and low inertia characteristics. The problem is reduced to the study of the Lagrange equations of the second order with a large positive parameter. The estimations of ultimate boundedness area and transient time have been obtained.

Keywords: ultimate boundedness, Lagrange equation of the second order, dissipative force, large parameter.

Известно, что положение равновесия механической системы при наличии в ней гироскопических сил и сил полной диссипации, обладает свойством асимптотической устойчивости по вектору обобщенных скоростей [1; 2]. При добавлении консервативных и позиционных неконсервативных сил ситуация в общем случае меняется. Так, например, неконсервативные позиционные силы могут разрушить устойчивость, а при наличии постоянно действующих силовых возмущений положение равновесия вообще отсутствует. На практике довольно часто вместо асимптотической устойчивости достаточным является требование ограниченности решений. В данной статье предложены достаточные условия предельной ограниченности обобщенных скоростей системы с полным набором сил. В качестве способа контроля радиуса предельной области для обобщенных скоростей используется уменьшение инерционных характеристик системы.

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений Лагранжа.

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_k}=Q_k(\tau,q,\dot{q}), k=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где $q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)^T$ – вектор обобщенных координат, $\dot{q}=(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n)^T$ – вектор обобщенных скоростей, $\overline{T}=\frac{1}{2}\dot{q}^T\overline{A}(q)\dot{q}$ – кинетическая энергия системы, $\overline{A}(q)=\{\overline{a}_{ij}(q)\}_{i,j=1}^n$ – симметричная положительно определенная матрица, $Q=(Q_1,Q_2,\ldots Q_n)^T$ – вектор обобщенных сил, $\tau\in R$ – переменная «времени». Предположим, что коэффициенты кинетической энергии $\overline{a}_{ij}(q)$можно представить в виде

$$\overline{a}_{ij}(q)=\mu^2 a_{ij}(q), i,j=\overline{1,n},$$

где $\mu>0$ – малый параметр. Кроме того, пусть вектор сил Q представим в виде [3]

$$Q=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}+R(q)+\Gamma(q,\dot{q})+D(q,\dot{q})+\varphi(\tau),$$

где $\Pi(q)$ – потенциальная энергия системы, $R(q)$ – вектор позиционных неконсервативных сил, $\Gamma(q,\dot{q})$ – вектор гироскопических сил, $D(q,\dot{q})$ – вектор диссипативных сил, $\varphi(\tau)$ – постоянно действующие силовые возмущения. Тогда, переходя к новой переменной времени t по формуле $d\tau=\mu dt$, получаем систему

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}+R_k(q)+\Gamma_k(q,h\dot{q})+D_k(q,h\dot{q})+\varphi_k(\mu t), k=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где через $\dot{q}$ обозначен вектор $\frac{dq}{dt}$, $T=\frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q}$, $A(q)=\{a_{ij}(q)\}_{i,j=1}^n$, $h=\frac{1}{\mu}>0$ – большой параметр.

Будем исследовать решение системы (2) на предельную ограниченность решений по вектору $\dot{q}$ при больших значениях параметра h и произвольных начальных условиях.

Ограниченность в пределе. В соответствии с [4] дадим определение понятия ограниченности в пределе для системы вида (2).

Определение 1. Решения системы (2) будем называть ограниченными в пределе по вектору $\dot{q}$, если существуют числа $B>0$ и $\Delta>0$, такие, что решения системы (2) удовлетворяют неравенству $\|\dot{q}(t,t_0,q_0,\dot{q}_0)\|\le B$[1] при $t\ge t_0+\Delta$, причем число B зависит

---

[1] В работе во всех случаях используется евклидова норма вектора $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$

только от параметра h, но не зависит от частного решения, тогда как Δ определяется для каждого конкретного решения, т. е. $\Delta = \Delta(h, t_0, q_0, \dot{q}_0)$.

Определение 2. Величину $\Delta = \Delta(h, t_0, q_0, \dot{q}_0)$ будем называть временем переходного процесса. Если Δ не зависит от t_0, то будем говорить, что решения системы (2) ограничены в пределе равномерно по t_0.

Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть элементы матрицы* $A(q) = \{a_{ij}(q)\}_{i,j=1}^{n}$ *являются ограниченными функциями, а собственные числа* λ_l *этой матрицы удовлетворяют соотношению* $\min\limits_{l} \inf\limits_{q \in E^n} \lambda_l(q) > 0$. *Кроме того, функции в правой части системы (2) удовлетворяют следующим условиям:*

С1. $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_k}$ *(*$k = \overline{1,n}$*) – ограниченные функции.*

С2. $\sum\limits_{k=1}^{n} D_k(q, h\dot{q})\dot{q}_k \le -h^{\sigma} d(q) \|\dot{q}\|^{\sigma+1}$, *где* $d(q)$ *– некоторая непрерывная функция,* $d(q) \ge d_0 > 0$, $\sigma \ge 1$ *– вещественное число.*

С3. $\sum\limits_{k=1}^{n} R_k(q)\dot{q}_k \le r(q)\|\dot{q}\|$, *где* $r(q)$ *– некоторая непрерывная положительная ограниченная функция.*

С4. $\|\varphi(\mu t)\| \le \overline{\varphi}$, $t \in \mathrm{R}$, *где* $\overline{\varphi} > 0$ *– некоторая постоянная.*

Тогда при $h > 0$ *решения системы (2) ограничены в пределе по вектору* $\dot{q}$ *равномерно по* t_0.

Доказательство. Идея доказательства состоит в использовании кинетической энергии $T(q, \dot{q})$ в качестве функции типа Ляпунова для оценки решений системы (2) по вектору $\dot{q}$. Обозначим $\lambda_{min} = \min\limits_{l} \inf\limits_{q \in E^n} \lambda_l(q)$, $\lambda_{max} = \max\limits_{l} \sup\limits_{q \in E^n} \lambda_l(q)$. По условию теоремы, $\lambda_{min} > 0$, $\lambda_{max} < \infty$, поэтому $T(q, \dot{q})$ является положительно определенной квадратичной формой переменных $\dot{q}_k$ и удовлетворяет оценке

$$\lambda_{min} \|\dot{q}\|^2 \le T(q, \dot{q}) \le \lambda_{max} \|\dot{q}\|^2. \tag{3}$$

Полная производная функции $T(q, \dot{q})$ на решениях системы (2) имеет вид [5, стр. 58]

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} R_k(q) \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} D_k(q, h\dot{q}) \dot{q}_k + \\ + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\mu t) \dot{q}_k .$$

Применяя условия C1 – C3 теоремы, получаем неравенство

$$\frac{dT}{dt} \le M\|\dot{q}\| + r(q)\|\dot{q}\| - h^{\sigma} d(q)\|\dot{q}\|^{\sigma+1} + \overline{\varphi}\|\dot{q}\|,$$

где $M = \sup_{q \in E^n} \left\| \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right\|$. Выберем число c_0, удовлетворяющее неравенству $0 < c_0 < d_0$. Тогда будет справедливо неравенство

$$\frac{dT}{dt} \le -c_0 h^{\sigma} \|\dot{q}\|^{\sigma+1} \tag{4}$$

при $\|\dot{q}\| \ge R(h)$, где

$$R(h) = h^{-1} \sup_{q \in E^n} \left(\frac{M + \overline{\varphi} + r(q)}{d(q) - c_0} \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \tag{5}$$

(в силу условия C4 теоремы супремум в правой части выражения (5) является конечным числом). Рассмотрим решение системы (2) с начальными данными $(t_0, q_0, \dot{q}_0)$, $\|\dot{q}_0\| > R(h)$. Проинтегрируем неравенство (4) в пределах $[t_0; t]$, где t достаточно близко к t_0, и, применяя оценки (3), получим

$$\lambda_{min} \|\dot{q}(t)\|^2 + c_0 h^{\sigma} \int_{t_0}^{t} \|\dot{q}(s)\|^{\sigma+1} ds \le \lambda_{max} \|\dot{q}_0\|^2 . \tag{6}$$

Если предположить, что $\|\dot{q}(t)\| \ge R(h)$ при всех $t \ge t_0$, то получится противоречие, поскольку интеграл в левой части неравенства (6) будет неограниченно возрастать при $t \to +\infty$, а в правой части находится постоянное число. Следовательно, при некотором $t_1 > t_0$ будет $\|\dot{q}(t_1)\| = R(h)$, т. е. в пространстве векторов $\dot{q}$ траектория $\dot{q} = \dot{q}(t)$ попадет на сферу $\|\dot{q}\| = R(h)$. Теперь, если неравенство (4) проинтегрировать в пределах $[t_1; t]$ и учесть, что $\|\dot{q}(t_1)\| = R(h)$, то будет справедлива оценка

$$\lambda_{min} \|\dot{q}(t)\|^2 + c_0 h^{\sigma} \int_{t_1}^{t} \|\dot{q}(s)\|^{\sigma+1} ds \le \lambda_{max} (R(h))^2 ,$$

откуда следует справедливость при всех $t \ge t_1 > t_0$ неравенства

$$\|\dot{q}(t)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} R(h). \tag{7}$$

Если $\|\dot{q}_0\| \le R(h)$, то в пространстве векторов $\dot{q}$ траектория $\dot{q} = \dot{q}(t)$ либо останется при всех $t \ge t_0$ внутри шара $\|\dot{q}\| < R(h)$, либо в какой-то момент t_1 окажется на его границе. В обоих случаях неравенство (7) будет справедливым, поэтому величину $B(h)$, указанную в теореме, можно определить по формуле

$$B(h) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} R(h). \tag{8}$$

Найдем оценку на время переходного процесса $\Delta(q_0, \dot{q}_0, h)$. Пусть начальные данные удовлетворяют условию $\|\dot{q}_0\| > B$. Найдем число $v > 0$, такое, что поверхность уровня $S_v(q) = \{\dot{q} : T(q, \dot{q}) = v\}$ при всех $q \in E^n$ лежит внутри шара $\|\dot{q}\| \le B(h)$. Из неравенств (3) следует, что в качестве такого числа v можно принять $v = \lambda_{min} B^2$. Из неравенств (3) также следует, что поверхность $S_v(q)$при всех $q \in E^n$ будет охватывать шар $\|\dot{q}\| \le R(h)$. Поскольку $\frac{dT}{dt} < 0$ при $\|\dot{q}\| \ge R(h)$, то в пространстве векторов $\dot{q}$ траектория $\dot{q} = \dot{q}(t)$, попав на поверхность $S_v(q)$, уже не выйдет за пределы шара $\|\dot{q}\| \le B(h)$. Поэтому в качестве оценки времени окончательного попадания траектории $\dot{q} = \dot{q}(t)$ в шар $\|\dot{q}\| \le B(h)$ можно принять время достижения этой траекторией поверхности $S_v(q)$. Проинтегрируем неравенство (4) в пределах $[t_0; t_0 + \Delta]$

$$T(q(t_0 + \Delta), \dot{q}(t_0 + \Delta)) - T(q_0, \dot{q}_0) \le -c_0 h^{\sigma} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \|\dot{q}(s)\|^{\sigma+1} ds.$$

Учитывая, что $T(q(t_0 + \Delta), \dot{q}(t_0 + \Delta)) = v$ и $\|\dot{q}(s)\| \ge R(h)$, получаем

$$v - T(q_0, \dot{q}_0) \le -c_0 h^{\sigma} R^{\sigma+1} \Delta,$$

откуда

$$\Delta \le h \frac{T(q_0, \dot{q}_0) - \lambda_{min} B^2}{c_0 \sup\limits_{q \in E^n} \left(\dfrac{M + \bar{\varphi} + r(q)}{d(q) - c_0} \right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}}. \tag{9}$$

Как следует из формулы (9), верхняя оценка на время переходного процесса не зависит от t_0, следовательно, ограниченность в пределе равномерна по t_0. Теорема доказана.

Как видно из формул (5) и (8) радиус предельного шара $B(h)$ может быть сделан как угодно мал увеличением параметра h. Это означает, что уменьшение инерционных характеристик системы может сгладить действие любых ограниченных возмущающих сил $\varphi(\tau)$, если все остальные силы удовлетворяют условиям теоремы. Однако, если в условии С2 указанная оценка на мощность диссипативных сил справедлива лишь при больших $\dot{q}$ (при $\|\dot{q}\| > \overline{R}$, где $\overline{R} > 0$ – некоторая постоянная), то предельный шар уже нельзя будет сделать как угодно малым, т. к. $B(h)$ будет ограниченно снизу числом $\overline{R}$.

Следует также отметить, что полученная верхняя оценка (9) на Δ неограниченно возрастает при $h \to +\infty$. Поскольку переменные времени в системах (1) и (2) связаны по формуле $\tau = \mu t$, то для системы (1) оценка (9) примет вид

$$\overline{\Delta} \le \frac{T(q_0, \dot{q}_0) - \lambda_{min} B^2}{c_0 \sup\limits_{q \in E^n} \left(\dfrac{M + \overline{\varphi} + r(q)}{d(q) - c_0} \right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

2. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. – М.: Научный мир, 2001. – 320 с.

3. Зубов В. И. Каноническая структура векторного силового поля // Проблемы механики твердого деформированного тела. – Л., 1970. – С. 187–215.

4. Йосидзава Т. Функции Ляпунова и ограниченность решений // Математика: сб. переводов. – М.: Мир. 1955. – С. 95–127.

5. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.