

КЕЛИН А.Н.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПОКОЯЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Аннотация. В статье рассматривается процесс распространения плоских звуковых волн (малых возмущений) в покоящейся среде. На основе построенных дивергентных разностных схем разработано программное обеспечение по расчету скорости и давления, вызванные распространением звуковых волн.

Ключевые слова: уравнение акустики, численное моделирование, закон сохранения, дивергентная разностная схема.

KELIN A.N.

NUMERICAL MODELLING OF FLAT SOUND WAVES DISTRIBUTION IN REST ENVIRONMENT

Abstract. The article considers the process of flat sound waves (small perturbation) distribution in the rest environment. Constructed on the basis of divergent difference schemes software for the calculation of the velocity and pressure caused by the propagation of sound waves developed.

Keywords: acoustics equation, numerical modelling, conservation law, divergent difference scheme.

1. Постановка начально-краевой задачи для уравнения акустики

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = 0, & x \in [0; L], t \in [0; T] \\ \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \rho_0 C_0^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, & x \in [0; L], t \in [0; T] \end{cases} \quad (1)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} &= g_1(x), & x \in [0; L], & t = 0 \\ p(x,t)|_{t=0} &= g_2(x), & x \in [0; L], & t = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{x=0} &= q_1(t), & t \in (0; T], & x = 0 \\ u(x,t)|_{x=L} &= q_2(t), & t \in (0; T], & x = L \\ p(x,t)|_{x=0} &= w_1(t), & t \in (0; T], & x = 0 \\ p(x,t)|_{x=L} &= w_2(t), & t \in (0; T], & x = L \end{aligned} \quad (3)$$

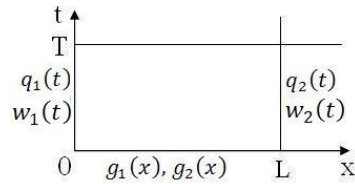


Рис. 1.1. Начальные и граничные данные для уравнения акустики

Система двух дифференциальных уравнений (1) описывает распространение плоских звуковых волн (малых возмущений) в покоящейся среде. Здесь $u(x, t)$ – малое отклонение скорости возмущенной среды от значения в состоянии покоя; $p(x, t)$ – малое отклонение давления возмущенной среды от значения в состоянии покоя; ρ_0 – плотность невозмущенной среды; C_0 – характеристика сжимаемости среды или скорость звука.

Требуется найти значения скорости $u(x, t)$ и давления $p(x, t)$, вызванные распространением звуковых волн.

2. Дивергентная разностная схема для уравнения акустики

Построим дивергентную разностную схему для решения системы обобщенного уравнения на основе интегрального закона сохранения

$$\begin{cases} \oint \rho_0 u(x, t) dx - p(x, t) dt = 0 \\ \oint \rho_0 u(x, t) dt - \frac{1}{C_0^2} p(x, t) dx = 0 \end{cases} .$$

Определим сетку и выберем на этой сетке одну ячейку

$$x_i = ih, \quad i = 0, \dots, \left[\frac{L}{h} \right]$$

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right]$$

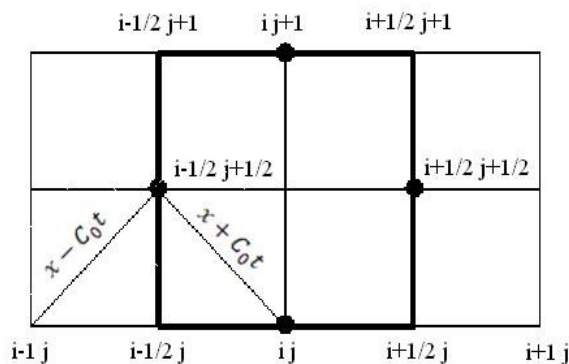


Рис. 1. Рассматриваемая ячейка

Рассмотрим интеграл по выделенной области

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \rho_0 u(x, t_j) dx - \int_{t_j}^{t_{j+1}} P(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \rho_0 u(x, t_{j+1}) dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} P(x_{i-\frac{1}{2}}, t) dt = 0 \\ \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{C_0^2} p(x, t_j) dx - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \rho_0 U(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{C_0^2} p(x, t_{j+1}) dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \rho_0 U(x_{i-\frac{1}{2}}, t) dt = 0 \end{array} \right.$$

Получим дивергентную разностную схему

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\tau} + \frac{P_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - P_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \frac{1}{C_0^2} \frac{p_{ij+1} - p_{ij}}{\tau} + \rho_0 \frac{U_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \end{array} \right.$$

Промежуточные значения в точках $x_{i-1/2}$ и $x_{i+1/2}$ на $j+1$ слое будем вычислять методом инвариантов Римана:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i-1j} + u_{ij}) + \frac{1}{2\rho_0 C_0}(p_{i-1j} - p_{ij}) \\ P_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_0 C_0}{2}(u_{i-1j} - u_{ij}) + \frac{1}{2}(p_{i-1j} + p_{ij}) \\ U_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{i+1j}) + \frac{1}{2\rho_0 C_0}(p_{ij} - p_{i+1j}) \\ P_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_0 C_0}{2}(u_{ij} - u_{i+1j}) + \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{i+1j}) \end{array} \right.$$

Подставим полученные выражения в дивергентную схему и получим конечные формулы для нахождения значений $u(x,t)$ и $p(x,t)$ в момент T :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{ij+1} = \frac{C_0 \tau}{2h} u_{i-1j} + \left(1 - \frac{C_0 \tau}{h}\right) u_{ij} + \frac{C_0 \tau}{2h} u_{i+1j} - \frac{\tau}{2h\rho_0} (p_{i+1j} - p_{i-1j}) \\ p_{ij+1} = \frac{C_0 \tau}{2h} p_{i-1j} + \left(1 - \frac{C_0 \tau}{h}\right) p_{ij} + \frac{C_0 \tau}{2h} p_{i+1j} - \frac{C_0^2 \tau \rho_0}{2h} (u_{i+1j} - u_{i-1j}) \end{array} \right.$$

при $i = 1.. \left[\frac{L}{h} - 1\right], j = 1.. \left[\frac{T}{\tau} - 1\right]$

$$\begin{cases} u_{0j} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} q_1(t) dt \\ u_{Lj} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} q_2(t) dt \\ p_{0j} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} w_1(t) dt \\ p_{Lj} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} w_2(t) dt \end{cases} \text{ при } j = 1.. \left[\frac{T}{\tau} \right]$$

$$\begin{cases} u_{i0} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_1(x) dx \\ p_{i0} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_j} g_2(x) dx \end{cases} \text{ при } i = 1.. \left[\frac{L}{h} \right]$$

Изложенная схема метода Годунова имеет первый порядок аппроксимации по h и по τ .

Получим оценку устойчивости данной схемы на основе принципа максимума. Для этого возьмем модуль от левой и правой части уравнений, заранее заменив все значения в правой части на максимальное значение. В итоге получим:

$$\tau \leq \frac{h}{C_0}$$

При выполнении этого условия разностная схема будет устойчива.

3. Численный эксперимент

Для численной реализации дивергентных разностных схем рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) со следующими параметрами

$$\rho_0 = 1,7839; C_0 = 322; L = 1; T = 0,004;$$

начальными данными

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= 322, \quad x \in [0; 1], \quad t = 0, \\ p(x, t)|_{t=0} &= 1,7, \quad x \in [0; 1], \quad t = 0. \end{aligned}$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= 1, \quad t \in (0; 0,004], \quad x = 0, \\ u(x, t)|_{x=1} &= 1, \quad t \in (0; 0,004], \quad x = 1, \\ p(x, t)|_{x=0} &= 1,7, \quad t \in (0; 0,004], \quad x = 0, \\ p(x, t)|_{x=1} &= 1,1, \quad t \in (0; 0,004], \quad x = 1. \end{aligned}$$

Результаты численных расчетов представлены на рис.1.

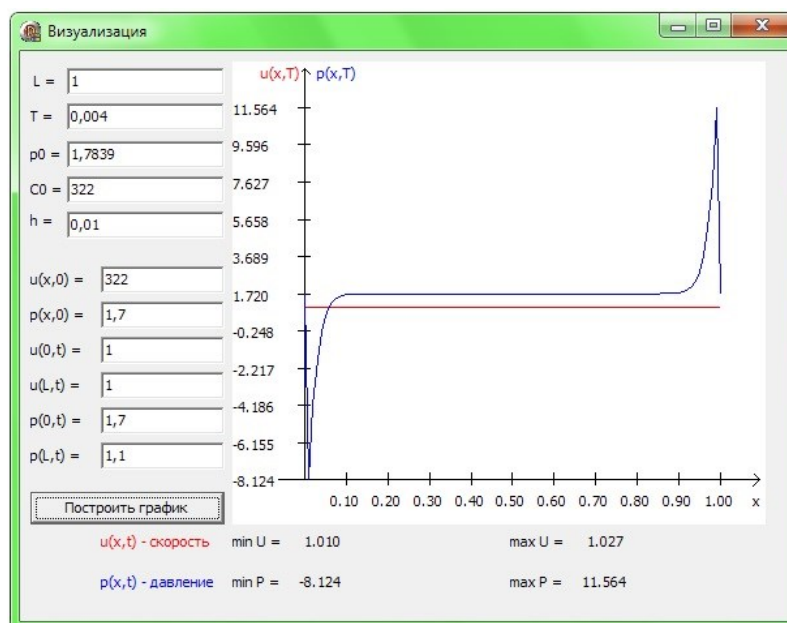


Рис. 1. Графики малых отклонений скорости $u(x,t)$ и давления $p(x,t)$ возмущенной среды от значения в состоянии покоя в момент времени T .

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
2. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. - М.: Наука, 1977. – 440 с.
3. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.