КОРЫТИН С. И., МАМЕДОВА Т. Ф.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ ПРОИЗВОДСТВА

Аннотация. В статье рассматривается задача построения математической модели для расчета оптимальной структуры выпуска продукции и соответствующей структуры цен, поддерживающих максимальный темп роста производства. Оптимальная траектория экономического роста производства определяется как долгосрочное состояние равновесия рынка.

Ключевые слова: математическая модель, оптимизация, функция Лагранжа, темпы роста производства, теория спроса и предложения.

KORYTIN S. I., MAMEDOVA T. F.

MODELING THE PRODUCTION STRUCTURE OPTIMIZATION PROCESS

Abstract. The problem of constructing a mathematical model for calculating the optimal structure of output and the structure of prices supporting the maximum rate of growth of production is considered in the article. The optimal trajectory of economic growth in production is defined as a long-term state of equilibrium in the market.

Keywords: mathematical model, optimization, Lagrange function, production growth rates, supply and demand theory.

Актуальность проблемы. Оптимальное распределение имеющихся ресурсов – основная задача менеджмента производства. Основной интерес связан с программами, которые помогают обеспечит оптимизацию. Условия оптимальности этих программ, построенные на математических законах, дают возможность изучить траекторию экономического роста как ряд отдельных равновесных состояний рынка, при котором объем предложения соответствует объему спроса.

Спрос – это выражение потребности участниками рынка, представляющее собой способность и желание приобретать экономические блага.

Предложение – это отражение поведения товаропроизводителя на экономическом рынке, его готовность предложить (произвести) определенное количество товара за ограниченный период времени при обозначенных условиях. Предложение характеризуется ценой, количество экономических благ (часто им выступают деньги), за которые продавец (покупатель) готов произвести продажу (покупку) товара.

Одним из важнейших факторов, влияющих на спрос, является цена. Наряду с данным компонентом, изменение спроса каждого товара отражает, например, возможность у покупателя удовлетворить ту же потребность другим, близким по назначению продуктом.

Из-за того, что стремления продавцов и потребителей удовлетворяются с помощью друг друга, они встречаются в экономических взаимоотношениях, образуется так называемый рынок – экономическая площадка взаимодействий между покупателями и поставщиками товара, в ходе которых экономическими агентами совершаются сделки.

При оптимальности траектории пропорции спроса, предложения и цен на большей ее части сохраняются постоянными, если экономический рост рассматривать в долгосрочной перспективе. Оптимальная траектория экономического роста производства определяется как долгосрочное состояние равновесия рынка [1].

Постановка задачи. Рассмотрим производителя, который использует $x = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ресурсов для производства s видов товара $q = \{q_1, \ldots, q_s\}$. Преобразование исходных ресурсов в товар описывается технологической функцией производителя $\varphi^n(q, x)$. С помощью этой функции записываются ограничения, которые описывают область допустимых связей между сырьем и товаром

$$\varphi(q, x) = 0.$$

Процедура оптимизации производства осуществляется в два этапа. На первом этапе определяется оптимальный вектор x^* для используемых ресурсов, при котором получаемый «товарный» вектор q^* имеет минимальные затраты [2; 3].

Если цена исходных продуктов $c_1, \ldots, c_m$, то стоимость сырья определяется по формуле:

$$C = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i.$$

Таким образом, на первом этапе решается следующая задача:

$$C(c, x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \overset{x}{\Rightarrow} min, \quad \varphi(q, x) = 0.$$

Для ее решения введем функцию Лагранжа производителя:

$$L(x, c, q, \theta) = C(c, x) - \mu\varphi(q, x).$$

Условия стационарности функции Лагранжа по прямым переменным x и двойственной переменной μ приобретают следующий вид

$$c_i + \mu \frac{\partial \varphi^n(q,x)}{\partial x_i} = 0;\ \ i = 1, \dots, m;\ \ \varphi(q,x) = 0\,.$$

Эти уравнения определяют оптимальные объемы сырьевых компонентов x^* в зависимости от объемов товаров q и уровней цен c, т. е.

$$x^* = g(q,c).$$

В результате получаем функцию затрат для производителя:

$$C(q,c) = \sum_{i=1}^{m} c_i g_i(q,s).$$

На втором этапе предполагается, что производитель выбирает свой вектор производства q таким образом, чтобы максимизировать свою прибыль.

Прибыль П определятся как разница между общей выручкой от продаж всех товаров и всеми производственными затратами:

$$\Pi(q,c,p) = \sum_{i=1}^{s} p_i q_i - C(q,c) > 0,$$

где p – цена продаж.

Если нет никаких ограничений на величину или норму прибыли (процент от выручки), то условия максимума прибыли определяются следующей системой уравнений

$$p_i - \frac{\partial C(q,c)}{\partial q_i} = 0, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial^2 C(q,c)}{\partial q_i \partial q_j} < 0; \qquad i,j = 1, \dots, s. \tag{2}$$

Заметим, что в условие (1) производные

$$\frac{\partial C(q,c)}{\partial q_i},$$

представляют собой по смыслу некоторые предельные цены производства товара. Тогда из первого условия следует, что цена продаж должна равняться предельной цене товара.

Решая уравнения (1) относительно количеств $q_1, \dots, q_s$ производимых товаров, получим оптимальное, с точки зрения производителя, предложение товаров на рынок. Оно, как нетрудно заметить, будет зависеть только от цен приобретения сырья и цен продаж:

$$\widetilde{g_\iota} = Y_i(p, c), \qquad i = 1, \dots, s.$$

Рассмотрим поведение производителя в период времени t и сформулируем задачу для поиска максимального темпа роста производства при указанном распределении выпуска $q_{i,t-1}$.

Найти $p_{i,t}$, $q_{i,t}$ при $i = 1,2, \dots, m$ и λ такие, что

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} p_{i,t} q_{j,t} \le c_{j,t} q_{j,t-1} \,, & j = 1,2, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^{m} c_i q_{j,t} \le q_{i,t-1} \,, & j = 1,2, \dots, m; \\ q_{j,t} \ge \lambda\, q_{i,t-1}, & j = 1,2, \dots, m. \end{cases} \qquad (3)$$

где p_i — набор цен на товары проиводителя, λ – скорость роста экономики производителя.

Решение задачи (3) позволяет найти оптимизированное распределение ресурсов производства по наборам товаров и вычислить цены, обеспечивающие максимальный рост производства. Так же найденная скорость роста характеризует сложившейся на момент времени t объем выпуска продукции и служит количественной характеристикой потенциала роста производства в состоянии q_i.

Предположим, что скорость выпуска продукции от периода к периоду неизменна. Тогда, используя модель (3) для отыскания максимального темпа роста и оптимальной структуры выпуска, получим

$$q_{j,t} = \lambda q_{j,t-1} = \lambda^{\,t} q_j; \quad j = 1,2, \dots, m.$$

Окончательно задачу можно сформулировать следующим образом.

Определить $\lambda > 0, \bar{q}$ и $\bar{p}$ такие, что выполняются условия:

$$\lambda \sum_{j=1}^{m} c_i \overline{q_\jmath} - \overline{q_\iota} \le 0; \qquad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\bar{p} - \lambda \sum_{i=1}^{m} c_i \overline{p_\iota} \le 0; \qquad j = 1, 2, \dots, m; \qquad (4)$$

$$\bar{p}(\lambda \sum_{j=1}^{m} c_i \bar{q_j} - \bar{q_i}) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

где $\bar{q}$ −вектор оптимальных пропорций выпуска продукции, $\bar{p}$ − вектор оптимальных цен.

Для автоматизации представленной выше методики было создано программное обеспечение на языке программирования С++.

В качестве исходных данных рассматриваются результаты мониторинга цен на апельсиновый сок марки «Добрый» и данные, полученные из опроса потребителей. В результате опроса были получены данные, приведенные в таблице 1.

Таблица 1

Результаты опроса потребителей

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Цена, руб.	95	60	75	50	80	55	65	100	45	75	10	50	75	40	65	85	56	55	50	75
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Цена, руб.	40	50	85	40	45	60	35	90	45	75	80	50	55	30	85	50	75	80	75	85

В ходе анализа цен, за которые супермаркеты предлагают покупателям приобрести сок «Добрый» получены данные, представленные в таблице 2.

Таблица 2

Результат анализа цен в супермаркетах

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Цена, руб.	88	92	93	87	98	93	95	92	88	95	93	98	92	95	87	98	93	95	90	93
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Цена, руб.	92	93	90	90	95	98	93	95	87	95	98	92	95	93	90	95	93	87	93	88

Из расчетов программы, представленных на рис. 1, видно, что равновесный объем будет равен 7 и равновесие наступит при значении цены равной 88 руб.

Цена, руб.	Спрос, шт.	Предложение, шт.
87	7	4
88	7	7
90	6	13
92	4	19
93	4	22
95	3	29
98	1	38
100	0	44

Рис. 1. Зависимость спроса и предложения на товар от цены.

Для рассмотрения задачи оптимизации ресурсов на предприятии апельсинового сока предположим, что имеются следующие ресурсы и подсистемы производства, представленные на рис. 2.

Нормы расхода ресурсов	Объект производства 1	Объект производства 2	Объект производства 3	Запасы ресурсов
Ресурс 1, кг.	120	45	98	520
Ресурс 2, кг.	85	110	0	350
Ресурс 3, л.	155	0	75	360
Ресурс 4, шт.	12	26	18	180
Ресурс 5, шт.	38	66	120	490

Рис. 2. Нормы расходов ресурсов для производства апельсинового сока.

На рис. 2 представлены нормы расходов ресурсов необходимых для соответствующих объектов производства и запасы этих ресурсов на предприятии

С каждого объекта производства предприятие в целом получает следующие доходы, представленные на рис. 3.

	Объект производства 1	Объект производства 2	Объект производства 3	Доход общий	Объем общий
Доход с объекта, руб.	28	25	12	65	
Объем, л.	1	2	2		5

Рис. 3. Доходы с объектов производства и объемы объектов производства.

Изучив рынок и смоделировав равновесный объем, добавим его в ограничение производства, исходя из того, что количество выпускаемых объемов не может быть больше равновесного. На основе этого ограничения будет производиться поиск оптимального распределения ресурсов между подсистемами производства.

В результате работы программы было получено распределение ресурсов, представленное на рис. 4.

Задействовано ресурсов	
Ресурс 1, кг.	406
Ресурс 2, кг.	305
Ресурс 3, л.	305
Ресурс 4, шт.	100
Ресурс 5, шт.	410

Рис. 4. Необходимое количество соответствующих ресурсов задействованных для оптимального производства товара.

Заключение. Для нахождения оптимального плана распределения ресурсов необходимо учитывать состояние и поведение рынка на промежутке времени (в динамике), что и отражает нахождение равновесного объема за прошедший период реализации товара, и применение этой величины для нахождения объемов производства уже на будущий этап продаж. В ходе работы созданной программы удалось получить план производства апельсинового сока, который удовлетворяет принципам и идее, построенным в ходе описания математической модели задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтизин А. Р. Вычислительная модель «Россия: Центр – Федеральные округа». – М.: ЦЭМИ РАН, 2003. – 134 с.
2. Симонов П. М. Экономико-математическое моделирование. Динамические модели экономики: учеб. пособие: в 2 ч. – Пермь: Пермский гос. ун-т, 2009. – 274 с.
3. Мамедова Т. Ф., Каледин О. Е., Шабанова В. Г., Кирейчева Е. Ю. Математическая модель оптимизации управления хозяйственной деятельностью одного производственного предприятия // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. X Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 28−30 октября 2015 г.) / под ред. И. В. Бойкова. – Пенза: ПГУ, 2016. – С. 125–130.