

**БАРИНОВА М. К., ГОГУЛИНА Е. Ю., ПОЧИНКА О. В.**  
**РЕАЛИЗАЦИЯ АЦИКЛИЧЕСКОЙ ДИАГРАММЫ СМЕЙЛА**  
**ОМЕГА-УСТОЙЧИВЫМ ДИФФЕОМОРФИЗМОМ ПОВЕРХНОСТИ<sup>1</sup>**

**Аннотация.** Диаграммой Смейла  $\Omega$ -устойчивого диффеоморфизма является граф, вершины которого соответствуют базисным множествам, а ориентированные ребра последовательно соединяют вершины максимальных цепей. Одной из проблем, поставленных Смейлом, является описание допустимых диаграмм — диаграмм, реализуемых каким-либо диффеоморфизмом. В настоящей работе доказано, что любой ациклический граф реализуется  $\Omega$ -устойчивым диффеоморфизмом поверхности с нетривиальными базисными множествами.

**Ключевые слова:** Диаграмма Смейла,  $\Omega$ -устойчивость, базисное множество, DA-диффеоморфизм, ациклический граф.

**BARINOVA M. K., GOGULINA E. YU., POCHINKA O. V.**  
**REALIZATION OF THE ACYCLIC SMALE DIAGRAM**  
**BY AN OMEGA-STABLE SURFACE DIFFEOMORFISM**

**Abstract.** Smale diagram of  $\Omega$ -stable diffeomorphism is a graph, which vertices correspond to basic sets and oriented edges sequentially connect vertices of maximal chain. Smale formulated description of acceptable diagrams, which are realized by a diffeomorphism. Present paper proves that an acyclic graph is implemented by an  $\Omega$ -stable diffeomorphism on surface with nontrivial basic sets.

**Keywords:** Smale diagram,  $\Omega$ -stability, basic set, DA-diffeomorphism, acyclic graph.

**Введение и формулировка результатов.** Пусть  $f$  – диффеоморфизм замкнутого  $n$ -многообразия  $M^n$ . Говорят, что диффеоморфизм  $f$  удовлетворяет аксиоме  $A$ , если его неблуждающее множество является гиперболическим, и периодические точки плотны в нем. Для  $A$ -диффеоморфизмов справедлива теорема о спектральном разложении С. Смейла [2], устанавливающая единственное представление неблуждающего множества в виде конечного объединения попарно непересекающихся множеств, называемых *базисными*, каждое из которых является компактным, инвариантным и топологически транзитивным.

На множестве базисных множеств любого  $A$ -диффеоморфизма  $f$  можно ввести отношение частичного порядка С. Смейла [2]. Именно, пусть  $\Lambda_i, \Lambda_j$  – базисные множества

---

<sup>1</sup> Исследование поддержано Лабораторией ДСП, НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ, договор 075-15-2019-1931.

A-диффеоморфизма  $f$ . Говорят, что  $\Lambda_i, \Lambda_j$  находятся в отношении  $\prec$  ( $\Lambda_i \prec \Lambda_j$ ), если  $W_{\Lambda_i}^s \cap W_{\Lambda_j}^u \neq \emptyset$ .

Последовательность, состоящая из базисных множеств  $\Lambda_i = \Lambda_{i_0}, \Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k} = \Lambda_j$  ( $k \geq 1$ ), такая что  $\Lambda_{i_0} \prec \Lambda_{i_1} \prec \dots \prec \Lambda_{i_k}$  называется *цепью длины  $k \in \mathbb{N}$ , соединяющей периодические орбиты  $\Lambda_i$  и  $\Lambda_j$* .

Такая цепь называется *максимальной*, если в нее нельзя добавить ни одного нового базисного множества. Цепь называется *циклом*, если  $\Lambda_i = \Lambda_j$ .

Диффеоморфизм  $f: M^n \rightarrow M^n$  называется  $\Omega$ -устойчивым, если  $C^1$ -близкие к  $f$  диффеоморфизмы топологически сопряжены на неблуждающих множествах. Согласно [3], диффеоморфизм  $f: M^n \rightarrow M^n$  является  $\Omega$ -устойчивым тогда и только тогда, когда он удовлетворяет аксиоме A и не имеет циклов.

*Диаграммой Смейла  $\Delta_f$   $\Omega$ -устойчивого диффеоморфизма  $f: M^n \rightarrow M^n$*  называется граф, вершины которого соответствуют базисным множествам, а ориентированные ребра последовательно соединяют вершины максимальных цепей.

В дальнейшем под *направленным циклом* ориентированного графа будем понимать замкнутый путь, пройденный в соответствии с направлениями ребер ([6]). Граф называют *ациклическим*, если у него нет направленных циклов. При этом не исключаются "параллельные" пути, которые выходят из одной начальной вершины и приходят в одну конечную, но при этом не совпадают.

В работе ([2]), в качестве проблемы сформулирован следующий вопрос: какие диаграммы могут соответствовать  $\Omega$ -устойчивым диффеоморфизмам?

Настоящая работа дает частичный ответ на этот вопрос в виде доказательства следующей теоремы.

**Теорема.** *Любой связный ациклический граф реализуется  $\Omega$ -устойчивым диффеоморфизмом поверхности.*

**Построение базисных множеств для диффеоморфизма двумерного тора. Диффеоморфизм Аносова на 2-торе.** Пусть  $C \in GL(2, \mathbb{R})$  – гиперболическая матрица с собственными значениями  $\lambda_1, \lambda_2$  такими что  $|\lambda_1| > 1$  и  $|\lambda_2| = 1/|\lambda_1|$ . Так как матрица  $C$  имеет определитель, равный 1, то она индуцирует гиперболический автоморфизм  $\hat{C}: T^2 \rightarrow T^2$  с неподвижной точкой  $O$ . Этот диффеоморфизм является диффеоморфизмом Аносова, обладающий двумя трансверсальными инвариантными слоениями (устойчивым и

неустойчивым), любой слой каждого из которых всюду плотен на торе. Кроме того, множество периодических точек диффеоморфизма  $\hat{C}$  также плотно на  $T^2$ .

**«Хирургическая операция» Смейла.** Пусть  $\sigma: \square \rightarrow [0,1]$  – функция, заданная формулой (см. рис. 1)

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x, \lambda^{-3}, \\ \frac{1}{1 + e^{\frac{\lambda^{-3}+1-x}{2} - (x-\lambda^{-3})^2(x-1)^2}}, & \lambda^{-3} < x < 1, \\ 1, & x..1. \end{cases}$$

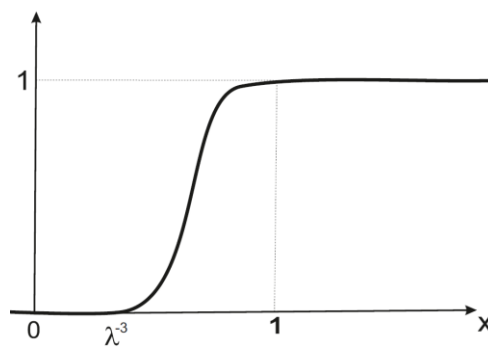


Рис. 1. График функции  $\sigma(x)$ .

Определим функцию  $\nu: [0,1] \rightarrow [0,1]$  формулой (см. рис. 2)

$$\nu(x) = \begin{cases} \lambda^2 x, & 0, x, \lambda^{-3}, \\ \sigma(x)x + (1-\sigma(x))\lambda^2 x, & \lambda^{-3} < x, 1. \end{cases}$$

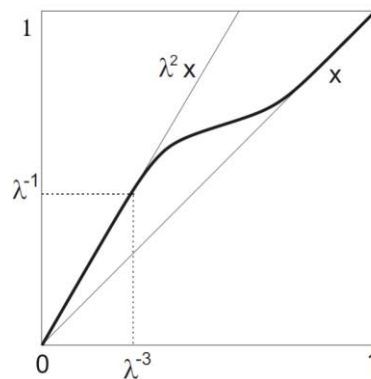


Рис. 2. График функции  $\nu(x)$ .

Продолжим функцию  $\nu$  нечетным образом на отрезок  $[-1,1]$ , положив  $\nu(-x) = -\nu(x)$  для  $x \in [0,1]$ .

Положим  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ . Определим функцию  $\gamma_A : D \rightarrow [0, 1]$  формулой

$$\gamma_A(x, y) = \begin{cases} \nu(x), & 0, \quad |y| \leq \lambda^{-3}, \\ \sigma(|y|)x + (1 - \sigma(|y|))\nu(x), & \lambda^{-3} < |y| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Определим диффеоморфизм  $B_A : D \rightarrow D$  формулой  $B_A(x, y) = (\gamma_A(x, y), y)$ . По построению,  $B_A(x, y) = (\lambda^2 x, y)$ , если  $|x| \leq \lambda^{-6}$  и является тождественным на  $\partial D$ .

Пусть  $x, y$  – локальные координаты в окрестности  $U(O)$  точки на  $T^2$  такие, что диффеоморфизм  $\hat{C}$  в этих координатах имеет форму  $\hat{C}(x, y) = (x/\lambda, \lambda y)$ . Тогда  $Ox \subset W_O^s$  и  $Oy \subset W_O^u$ , а также  $\{y = \text{const}\}$  и  $\{x = \text{const}\}$  являются устойчивым и неустойчивым слоениями. Определим диффеоморфизм  $\hat{B}_A : T^2 \rightarrow T^2$ , совпадающий с диффеоморфизмом  $B_A$  внутри окрестности  $U(O)$  и тождественный вне этой окрестности. Тогда согласно [4], [1], диффеоморфизм  $\hat{\Psi}_A = \hat{B}_A \circ \hat{C}$  является DA-диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого состоит из одномерного аттрактора  $A$ , обладающего единственной связкой степени 2 с двумя различными граничными неподвижными  $p_1$  и  $p_2$ , и источниковой неподвижной точкой  $\alpha$  (см. рис. 3).

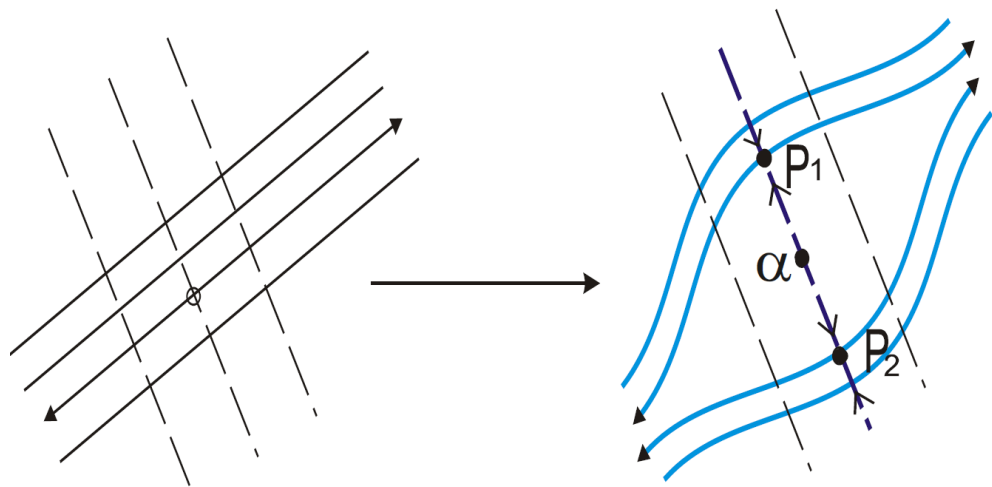


Рис. 3. «Хирургическая операция» Смейла.

**Модельные диффеоморфизмы на торе.** В этом разделе, используя хирургическую операцию Смейла, мы построим модельные диффеоморфизмы на двумерном торе.

**Диффеоморфизм  $F_{m_1, \dots, m_k}$ .** Выберем  $k \in \mathbb{N}$  периодических орбит  $O_1, \dots, O_k$  диффеоморфизма Аносова  $\hat{C}$  периодов  $m_1, \dots, m_k$ , соответственно. В окрестности каждой орбиты произведем хирургическую операцию Смейла вдоль устойчивого слоения.

Полученный диффеоморфизм  $F_{m_1, \dots, m_k} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  имеет единственный нетривиальный одномерный аттрактор  $\Lambda_{m_1, \dots, m_k}$  и  $k$  периодических источниковых орбит  $\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_k}$  периодов  $m_1, \dots, m_k$ , соответственно.

**Диффеоморфизм  $F^{n_1, \dots, n_l}$ .** Выберем  $l \in \mathbb{N}$  периодических орбит  $O^1, \dots, O^l$  диффеоморфизма Аносова  $\hat{C}$  периодов  $n_1, \dots, n_l$ , соответственно. В окрестности каждой орбиты произведем хирургическую операцию Смейла вдоль неустойчивого слоения. Полученный диффеоморфизм  $F^{n_1, \dots, n_l} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  имеет единственный нетривиальный одномерный репеллер  $\Lambda^{n_1, \dots, n_l}$  и  $l$  периодических стоковых орбит  $\omega_{n_1}, \dots, \omega_{n_l}$  периодов  $n_1, \dots, n_l$ , соответственно.

**Диффеоморфизм  $F_{m_1, \dots, m_k}^{n_1, \dots, n_l}$ .** Выберем  $l+k \in \mathbb{N}$  периодических орбит  $O_1, \dots, O_k, O^1, \dots, O^l$  диффеоморфизма Аносова  $\hat{C}$  периодов  $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_l$ , соответственно. В окрестности каждой орбиты  $O_1, \dots, O_k$  произведем хирургическую операцию Смейла вдоль устойчивого слоения и в окрестности каждой орбиты  $O^1, \dots, O^l$  произведем хирургическую операцию Смейла вдоль неустойчивого слоения. Полученный диффеоморфизм  $F_{m_1, \dots, m_k}^{n_1, \dots, n_l} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  имеет единственное нетривиальное нульмерное базисное множество  $\Lambda_{m_1, \dots, m_k}^{n_1, \dots, n_l}$ ,  $k$  периодических источниковых орбит  $\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_k}$  периодов  $m_1, \dots, m_k$  и  $l$  периодических стоковых орбит  $m_1, \dots, m_k$  периодов  $n_1, \dots, n_l$ , соответственно.

Примеры модельных диффеоморфизмов  $F_{2,3}, F^{1,4}, F_2^4$  изображены на рисунке 4.

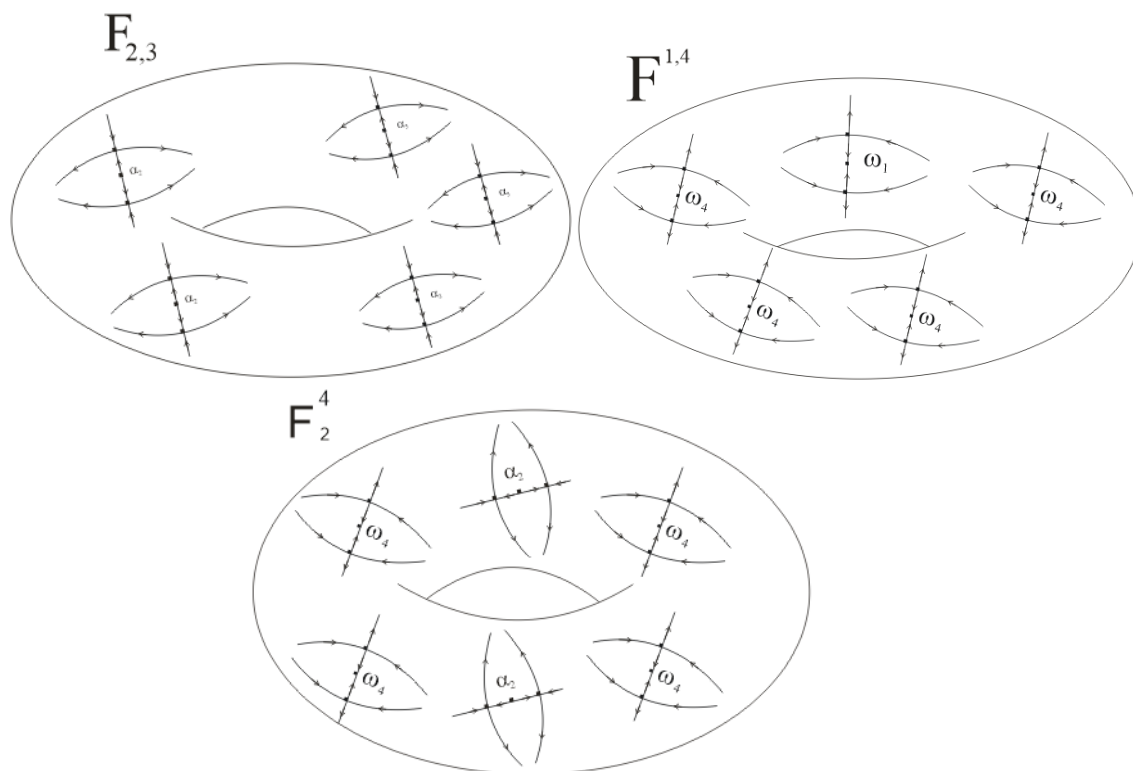


Рис. 4. Модельные диффеоморфизмы  $F_{2,3}, F^{1,4}, F_2^4$ .

**Доказательство основного результата.** В настоящем разделе мы реализуем диаграмму Смейла  $\Omega$ -устойчивым диффеоморфизмом поверхности.

**Распределение вершин графа по уровням.** Так как в графе  $\Gamma$  нет направленных циклов, на нем можно ввести частичный порядок. Упорядочим вершины графа по следующему принципу:

- уровень  $B_0$  состоит из вершин  $b_0^0, \dots, b_0^{q_0}$ , в которые не входит ни одно ребро;
- уровень  $B_r$  состоит из вершин  $b_r^0, \dots, b_r^{q_r}$ , в которые входят, только ребра из вершин уровней  $B_0, \dots, B_{r-1}$ ,
- последний уровень  $B_p$  состоит из вершин  $b_p^0, \dots, b_p^{q_p}$ , из которых не выходят ребра (см. рис. 5).

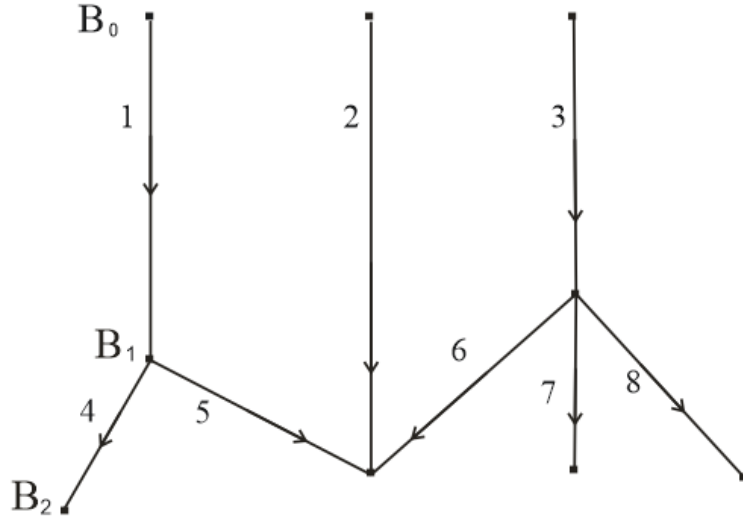


Рис. 5. Распределение вершин по уровням.

Перенумеруем ребра графа в произвольном порядке: каждому ребру  $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2})$  поставим в соответствие некоторый номер  $k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ , то есть каждое ребро будет определяться тройкой  $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2}, k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$ .

**Реализация вершин уровня  $B_0$ .** Для каждой вершины  $b_0^j$  и каждого выходящего ребра положим  $n_i = k_{0, r_i}^{j, j_i}$  и  $f_{b_0^j} = F^{n_1 \dots n_{\nu_0^j}}$ . Обозначим через  $\omega_{0, r_i}^{j, j_i}$  стоковую орбиту, соответствующую выходящему ребру  $(b_0^j, b_{r_i}^{j_i}, k_{0, r_i}^{j, j_i})$ . В примере графа на рисунке 5,  $f_{b_0^0} = F^1, f_{b_0^1} = F^2, f_{b_0^2} = F^3$ .

**Реализация вершин уровня  $B_r$ .** Для каждой вершины  $b_r^j$  и каждого входящего ребра  $(b_{r_i}^{j_i}, b_r^j, k_{r_i, r}^{j_i, j}), i = 1, \dots, \mu_r^j$  положим  $m_i = k_{r_i, r}^{j_i, j}$ . Для каждого выходящего ребра  $(b_r^j, b_{r_i}^{j_i}, k_{r, r_i}^{j, j_i}), i = 1, \dots, \nu_r^j$  положим  $n_i = k_{r, r_i}^{j, j_i}$ . Положим  $f_{b_r^j} = F_{m_1 \dots m_{\mu_r^j}}^{n_1 \dots n_{\nu_r^j}}$ . Обозначим через  $\alpha_{r_i, r}^{j_i, j}$  источникную орбиту, соответствующую входящему ребру  $(b_{r_i}^{j_i}, b_r^j, k_{r_i, r}^{j_i, j})$  и через  $\omega_{r, r_i}^{j, j_i}$  – стоковую орбиту, соответствующую выходящему ребру  $(b_r^j, b_{r_i}^{j_i}, k_{r, r_i}^{j, j_i})$ . В примере графа на рисунке 5,  $f_{b_0^0} = F_1^{4,5}, f_{b_1^1} = F_3^{6,7,8}$ .

**Реализация вершин уровня  $B_p$ .** Для каждой вершины  $b_p^j$  и каждого входящего ребра  $(b_{r_i}^{j_i}, b_p^j, k_{r_i, r}^{j_i, j}), i=1, \dots, \mu_p^j$  положим  $m_i = k_{r_i, r}^{j_i, j}$  и  $f_{b_p^j} = F_{m_1, \dots, m_{\mu_p^j}}$ . Обозначим через  $\alpha_{r_i, p}^{j_i, j}$  источниковую орбиту, соответствующую входящему ребру  $(b_{r_i}^{j_i}, b_p^j, k_{r_i, r}^{j_i, j})$ .

В примере графа на рисунке 5,  $f_{b_2^0} = F_4, f_{b_2^1} = F_{2,5,6}, f_{b_2^2} = F_7, f_{b_2^3} = F_8$ .

**Склейка динамики вдоль ребра графа  $\Gamma$ .** Каждому ребру  $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2}, k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$  графа  $\Gamma$  однозначно соответствует стоковая орбита  $\omega_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$  диффеоморфизма  $f_{b_{r_1}^{j_1}}$  и источниковая орбита  $\alpha_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$  диффеоморфизма  $f_{b_{r_2}^{j_2}}$ . Обе орбиты имеют одинаковый период  $k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ . Покажем, как склеить динамику вдоль ребра  $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2}, k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$ .

Выберем окрестности  $U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}, V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ , содержащие орбиты  $\omega_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}, \alpha_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ , соответственно, и такие, что  $f_{b_{r_1}^{j_1}}(U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}) \subset \text{int} U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}, V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \subset \text{int} f_{b_{r_2}^{j_2}}(V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$ . Положим  $X_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} = U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}, \text{int} f_{b_{r_1}^{j_1}}(U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}), Y_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} = f_{b_{r_2}^{j_2}}(V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}), \text{int} V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ . Оба множества состоят из одинакового количества двумерных колец. Обозначим через  $H_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} : X_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \rightarrow Y_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$  диффеоморфизм такой, что  $H_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \circ f_{b_{r_1}^{j_1}}|_{\partial U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}} = f_{b_{r_2}^{j_2}} \circ H_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}|_{\partial U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}}$ .

На рисунке 6 введенные объекты изображены для ребра  $(b_0^0, b_1^0, 1)$  графа, приведенного на рисунке 5.

Положим

$$Q_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} = (\mathbb{T}^2, \text{int} f_{b_{r_1}^{j_1}}(U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})) \cup (\mathbb{T}^2, \text{int} V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$$

и

$$\hat{Q}_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} = (\mathbb{T}^2, \text{int} f_{b_{r_1}^{j_1}}(U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})) \cup_{H_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}} (\mathbb{T}^2, \text{int} V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}).$$

Обозначим через  $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} : Q_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \rightarrow \hat{Q}_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$  естественную проекцию.

Склейкой динамики вдоль ребра  $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2}, k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$  графа  $\Gamma$  назовем диффеоморфизм

$f_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} : \hat{Q}_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \rightarrow \hat{Q}_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ , совпадающий с диффеоморфизмом  $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} f_{b_{r_2}^{j_2}} (p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})^{-1}|_{p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}(\mathbb{T}^2, V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})}$  на  $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}(\mathbb{T}^2, V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$  и с диффеоморфизмом  $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} f_{b_{r_1}^{j_1}} (p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})^{-1}|_{p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}(\mathbb{T}^2, U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})}$  на  $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}(\mathbb{T}^2, U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$ .



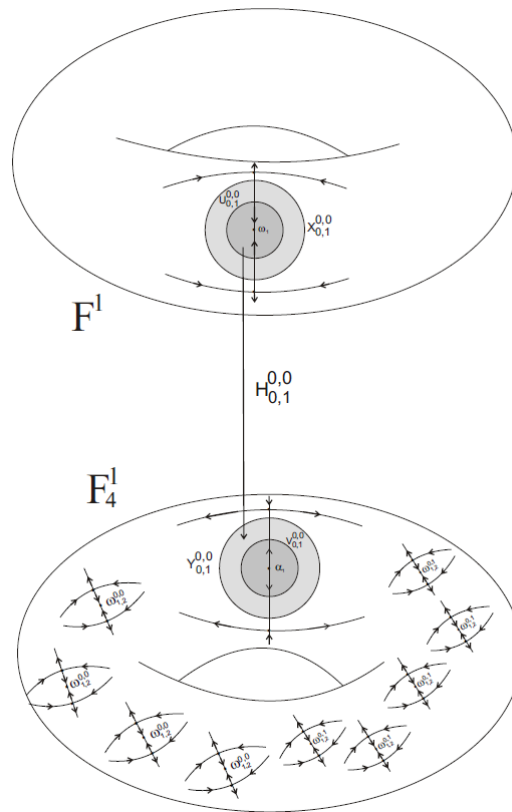


Рис. 6. Объекты, связанные с ребром  $(b_0^0, b_1^0, 1)$ .

**Построение результирующего диффеоморфизма.** В построенных по графу  $\Gamma$  моделях существует взаимно однозначное соответствие между стоковыми и источниковыми орбитами.

Именно стоковая орбита  $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}^{j_1, j_2}$  диффеоморфизма  $f_{b_1^1}$  соответствует источниковой орбите  $\alpha_{\alpha_1, \alpha_2}^{j_1, j_2}$  диффеоморфизма  $f_{b_2^2}$ . Обе орбиты имеют одинаковый период  $k_{\alpha_1, \alpha_2}^{j_1, j_2}$ .

Результирующий диффеоморфизм  $f: M^2 \rightarrow M^2$  представляет из себя склейку динамики вдоль всех ребер графа  $\Gamma$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каток А. Б., Хасселблатт Б. Введение в современную теорию динамических систем. – М.: Факториал, 1999. – 767 с.
2. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25, В. 1. – С. 113–185.
3. Smale S. The  $\Omega$ -stability theorem // Same Proceedings. – 1970. – Vol. 14. – P. 289–297.

4. Williams R. The “*DA*” maps of Smale and structural stability // Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc. – 1970. – P. 329–334.
5. Карпов Д. В. Теория графов. – СПб.: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН. – 2017. – 482 с.