КАДРЯКОВА М. Р., ШАМАНАЕВ П. А., ЛОГИНОВ Б. В.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Аннотация. Методами теории ветвления найдены периодические решения одного класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в резонансном случае. Построены графики периодических траекторий возмущенной и невозмущенных систем при различных значениях резонансного параметра.

Ключевые слова: линейные неоднородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, малый параметр, методы теории ветвления, периодические решения, резонансный случай.

KADRYAKOVA M. R., SHAMANAEV P. A., LOGINOV B. V.

ON PERIODIC SOLUTIONS FOR A CLASS OF LINEAR INHOMOGENEOUS SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL PARAMETER IN RESONANCE CASE

Abstract. By methods of branching theory, the authors find periodic solutions for a class of linear inhomogeneous systems of ordinary differential equations with a small parameter in the resonance case. Graphs of periodic trajectories of perturbed and unperturbed systems for different values of the resonance parameter are constructed.

Keywords: linear inhomogeneous systems of ordinary differential equations, small parameter, methods of branching theory, periodic solutions, resonance case.

В работах [1–3] рассмотрена задача о ветвлении периодических решений линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого. В работе [4] приведен пример одной линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым линейным возмущением, для которой справедливы результаты работы [3]. Расширим класс линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых справедливы результаты работы [3].

Для этого рассмотрим класс возмущенных линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} - \varepsilon\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\,Sin(\omega t)\\ b\,Cos(\omega t)\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $x_i \in R$, ε – малый вещественный параметр, $a,\ b, \alpha,\ \omega \in R$ – фиксированные параметры, для которого параметры α и ω связаны соотношениями $\alpha = k\ \omega, k = 2,3, \dots$.

В обозначениях работы [3] найдем

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} a\, Sin(\omega t) \\ b\, Cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

и, следовательно, $f(t)$ – периодическая вектор-функция с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Найдем собственные значения матрицы B_0:

$$L_0(\lambda) \equiv B_0 - \lambda A = \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha \\ -\alpha & -\lambda \end{pmatrix}, \quad det L_0(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i\alpha.$$

Следовательно, имеется только одна пара чисто мнимых собственных значений матрицы B_0 и ей соответствует пара периодических решений с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$ линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = B_0 y, \tag{3}$$

где $y \in R^2$.

Так как собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы B_0 и период T функции $f(t)$ связаны соотношениями

$$\lambda_{1,2} = \pm i\frac{2\pi k}{T},$$

то для линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t), \tag{4}$$

где $z \in R^2$, согласно [5], имеет место резонансный случай.

Ставится задача [3; 6]: при достаточно малых вещественных ε найти все T-периодические решения $x(t,\varepsilon)$ уравнения (1), удовлетворяющих условию $x(t,0) = z(t)$, где $z(t)$ – T-периодические решения уравнения (4).

Для решения поставленной задачи применим методы теории ветвления, основанные на построении обобщенных жордановых наборов и исследовании разрешающих систем Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве [1–3; 6].

Найдем элементы B_1-жордановой цепочки оператора $\mathcal{B}_0$

$$\mathcal{B}_0 \varphi_k^1 = 0,\ \mathcal{B}_0 \equiv \left[B_0 - A\frac{d}{dt}\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\right]. \tag{5}$$

Будем искать $\varphi_k^{(1)}$ в виде $\varphi_k^1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{i\alpha t}$. Подставляя в уравнение (5) получим

$$\varphi_1^{(1)} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\alpha t}, \text{где } a_1 \in C. \tag{6}$$

Найдем $\varphi_k^{(2)}$ как решение уравнения

$$\mathcal{B}_0\varphi_1^2 = B_1\varphi_1^{(1)},$$

где B_1 и $\mathcal{B}_0$ определяются по формуле (2) и (5) соответственно.

Имеем

$$\varphi_1^{(2)} = a_1\begin{pmatrix} a_2 \\ ia_2 + \dfrac{2}{\alpha}\end{pmatrix}e^{i\alpha t}, a_2 \in C. \quad (7)$$

Так как уравнение $\mathcal{B}_0\varphi_1^{(3)} = B_1\varphi_1^{(2)}$ не имеет решений, то длина B_1-жордановой цепочки оператора $\mathcal{B}_0$ равна $p_1 = 2$.

Аналогично, найдем B_1^*- жорданову цепочку оператора

$$\mathcal{B}_0^* \equiv \mathcal{B}_0^* + A^*\frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{d}{dt} \quad (8)$$

$$\psi_1^{(1)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ i\end{pmatrix}e^{i\alpha t}, \qquad \psi_1^{(2)} = c_1\begin{pmatrix} c_2 \\ ic_2 - \dfrac{2}{\alpha}\end{pmatrix}e^{i\alpha t}, \qquad c_1, c_2 \in C. \quad (9)$$

Найдем элементы $z_1^{(j)} \in E_{2,n}$ и $\gamma_1^{(l)} \in E_{1,n}$ согласно работы [1]

$$\begin{gathered} z_1^{(1)} \equiv B_1\varphi_1^{(2)} = 2a_1\begin{pmatrix} a_2 \\ -ia_2 - \dfrac{2}{\alpha}\end{pmatrix}e^{i\alpha t}, \quad z_1^{(2)} \equiv B_1\varphi_1^{(1)} = 2a_1\begin{pmatrix} 1 \\ -i\end{pmatrix}e^{i\alpha t} \\ \gamma_1^{(1)} \equiv B_1^*\psi_1^{(2)} = 2c_1\begin{pmatrix} c_2 \\ -ic_2 - \dfrac{2}{\alpha}\end{pmatrix}e^{i\alpha t}, \quad \gamma_1^{(2)} \equiv B_1^*\psi_1^{(1)} = 2c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -i\end{pmatrix}e^{i\alpha t}\end{gathered} \quad (10)$$

Коэффициенты a_i, c_i $(i = \overline{1, r})$ подбираем из условий биортогональности [3].

Вычислим

$$\begin{aligned} &\ll \varphi_1^{(1)}, \gamma_1^{(1)} \gg = \frac{4a_1\bar{c}_1 i}{\alpha}; && \ll z_1^{(1)}, \psi_1^{(1)} \gg = \frac{4a_1\bar{c}_1 i}{\alpha}; \\ &\ll \varphi_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)} \gg = 0; && \ll z_1^{(1)}, \psi_1^{(2)} \gg = \frac{4a_1\bar{c}_1 i}{\alpha}\left[a_2 + \bar{c}_2 - \frac{2i}{\alpha}\right]; \\ &\ll \varphi_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)} \gg = \frac{4a_1\bar{c}_1 i}{\alpha}\left[a_2 + \bar{c}_2 - \frac{2i}{\alpha}\right]; && \ll z_1^{(2)}, \psi_1^{(1)} \gg = 0; \\ &\ll \varphi_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)} \gg = \frac{4a_1\bar{c}_1 i}{\alpha}; && \ll z_1^{(2)}, \psi_1^{(2)} \gg = \frac{4a_1\bar{c}_1 i}{\alpha}; \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\ll f, g \gg = \frac{1}{T}\int_0^T < f, g > dt$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{4a_1\bar{c}_1 i}{\alpha} = 1 \\ \dfrac{4a_1\bar{c}_1 i}{\alpha}\left[a_2 + \bar{c}_2 - \dfrac{2i}{\alpha}\right] = 0. \end{cases}$$

Представим вектор функции $f(t)$ в экспоненциальной форме

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}\begin{pmatrix}-ai\\ b\end{pmatrix} + e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}ai\\ b\end{pmatrix}\right)$$

и вычислим

$$\begin{gathered}\ll f, \psi_1^{(1)} \gg = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} < f, \psi_1^{(1)} > dt = \\ = \frac{\bar{c}_1(a+b)}{4\pi(k-1)}\left(e^{-i2\pi(k-1)} - 1\right) - \frac{\bar{c}_1(a-b)}{4\pi(k+1)}\left(e^{-i2\pi(k+1)} - 1\right) = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Аналогично вычислим

$$\begin{gathered}\ll f, \psi_1^{(2)} \gg = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} < f, \psi_1^{(2)} > dt = \\ = \frac{\bar{c}_1(\bar{c}_2 k\omega(a+b) - 2bi)}{4\pi k\omega(k-1)}\left(e^{-i2\pi(k-1)} - 1\right) - \frac{\bar{c}_1(\bar{c}_2 k\omega(a-b) + 2bi)}{4\pi k\omega(k+1)}\left(e^{-i2\pi(k+1)} - 1\right) \\ = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Учитывая (12) и (13), найдем

$$h_{11} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\psi_1^{(1)} + \varepsilon\psi_1^{(2)}\right)$$

$$\xi_{11} = -\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \ll f, h_{11} \gg = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\ll f, \psi_1^{(1)} \gg + \varepsilon \ll f, \psi_1^{(2)} \gg\right] = 0,$$

и, следовательно, $\bar{\xi}_{11} = 0$.

Тогда согласно работы [3] система (1) имеет аналитическое по ε единственное T-периодическое решение

$$x(t,\varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon}\left[\xi_{11}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{11}\bar{\varphi}_k^{(1)}\right] + \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\xi_{11}\varphi_k^{(2)} + \bar{\xi}_{11}\bar{\varphi}_k^{(2)}\right] + y(t) = y(t), \tag{14}$$

где

$$y(t) = [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t). \tag{15}$$

Здесь $\Gamma_0^{-1} = \widetilde{B}_0$, $\widetilde{B}_0 \equiv B_0 + \ll \cdot, \gamma_1^{(1)} \gg z_1^{(1)} + \ll \cdot, \bar{\gamma}_1^{(1)} \gg \bar{z}_1^{(1)}$.

Преобразовывая уравнение (15), получим

$$\widetilde{B}_0 y = \varepsilon B_1 y + f(t). \tag{16}$$

Решение уравнения (16) ищем в виде

$$y(t) = e^{i\omega t}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix} + e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}\bar{d}_1\\ d_2\end{pmatrix},$$

где $d_i \in C$, $i = 1,2$.

Подставив $y(t)$ в уравнение (16), получим

$$\left[\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{pmatrix} - i\omega - \varepsilon\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}e^{i\omega t} + \ll e^{i\omega t}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}, \gamma_k^{(1)} \gg z_k^{(1)} + \tag{17}$$

$$+\ll e^{i\omega t}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \bar{\gamma}_k^{(1)} \gg \bar{z}_k^{(1)} + \left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} + i\omega - \varepsilon\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} +$$

$$+\ll e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix}, \gamma_k^{(1)} \gg \bar{z}_k^{(1)} + \ll e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix}, \bar{\gamma}_k^{(1)} \gg \bar{z}_k^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i\omega t}\begin{pmatrix} -ai \\ b \end{pmatrix} + e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} ai \\ b \end{pmatrix}\right].$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$ в левой и правой частях уравнения (17), получим следующую систему уравнений:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} + i\omega - \varepsilon\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -ai \\ b \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Выделяя вещественную и мнимую часть $d_j = d_j^{(1)} + i d_j^{(2)}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} -2\varepsilon & \alpha & \omega & 0 \\ -\alpha & 2\varepsilon & 0 & \omega \\ -\omega & 0 & -2\varepsilon & \alpha \\ 0 & -\omega & -\alpha & 2\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \\ d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{b}{2} \\ -\dfrac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Так как при $\varepsilon < \frac{\omega^2}{2}\sqrt{(k^2-1)}$, то определитель матрицы системы (19)

$$\Delta = 16\varepsilon^4 - 8\varepsilon^2 k^2\omega^2 + 8\varepsilon^2\omega^2 - 2k^2\omega^4 + k^4\omega^8 \neq 0,$$

И, следовательно, система (19) имеет единственное решение. Решая ее при $\alpha = k\omega$ получим:

$$d = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega(\alpha + kb)}{4\varepsilon^2 - \omega^2(k^2-1)} \\ \dfrac{\varepsilon b}{4\varepsilon^2 - \omega^2(k^2-1)} \\ \dfrac{\varepsilon a}{4\varepsilon^2 - \omega^2(k^2-1)} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega(k\alpha + b)}{4\varepsilon^2 - \omega^2(k^2-1)} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Следовательно, T-периодическое решение системы (1) имеет вид

$$x(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1(t,\varepsilon) \\ x_2(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\varepsilon b}{\omega^2(k^2-1) - 4\varepsilon^2} Sin(\omega t) - \dfrac{\omega(\alpha + kb)}{\omega^2(k^2-1) - 4\varepsilon^2} Cos(\omega t) \\ \dfrac{\omega(k\alpha + b)}{\omega^2(k^2-1) - 4\varepsilon^2} Sin(\omega t) - \dfrac{\varepsilon a}{\omega^2(k^2-1) - 4\varepsilon^2} 2Cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что при $\varepsilon = 0$ уравнения (1) и (4) совпадают, находим, что их однопараметрическое семейство вещественных T-периодических решений представимы в виде [3]

$$x(t,0) \equiv z(t) = c\left[\varphi_1^{(1)} + \bar{\varphi}_1^{(1)}\right] + \Gamma_0 f,$$

где $c \in R$.

Найдем $u = \Gamma_0 f(t)$. Представим это уравнение в виде

$$\widetilde{B}_0 u = f(t),$$

или

$$B_0 u + \ll u, \gamma_1^{(1)} \gg z_1^{(1)} + \ll u, \bar{\gamma}_1^{(1)} \gg \bar{z}_1^{(1)} = f. \quad (21)$$

Представляя решение в виде

$$u = e^{i\omega t}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

и подставляя в систему (21) получим

$$d = \begin{pmatrix} -\frac{b}{2k\omega} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{a}{2k\omega} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$z(t) = \begin{pmatrix} x_1(t,0) \\ x_2(t,0) \end{pmatrix} = c\left[\varphi_1^{(1)} + \bar{\varphi}_1^{(1)}\right] + \begin{pmatrix} -\frac{b}{2k\omega} Sin(\omega t) - Cos(\omega t) \\ Sin(\omega t) - \frac{a}{2k\omega} Cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Параметр a_1 в формуле (6) подберем из условия, что $\left\|\varphi_1^{(1)}\right\| = 1$. Этому условию удовлетворяет $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Следовательно,

$$\varphi_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{ik\omega}, \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) получим, что однопараметрическое семейство вещественных T-периодических решений системы (1) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$z(t) = c\sqrt{2}\begin{pmatrix} Cos(k\omega t) \\ Sin(k\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{b}{2k\omega} Sin(\omega t) - Cos(\omega t) \\ Sin(\omega t) - \frac{a}{2k\omega} Cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Построим графики компонент решений систем (1) и (4).

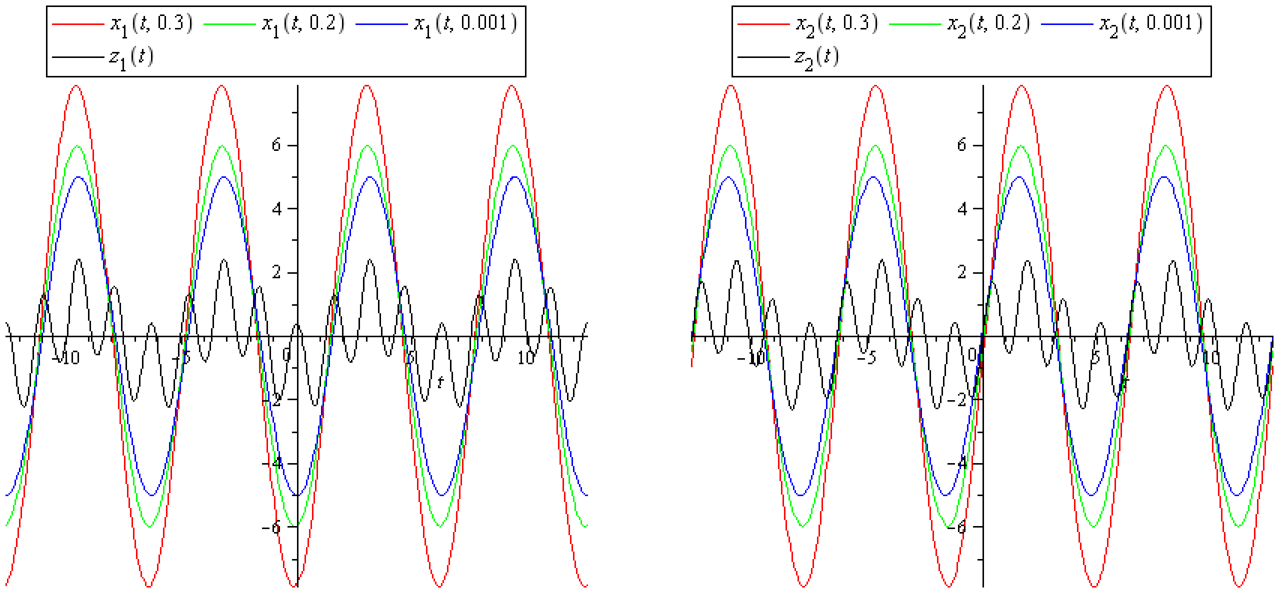

Рис. 1. Графики компонент $x_1(t, \varepsilon)$ и $x_2(t, \varepsilon)$ решения системы (1) при различных ε и компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$ решения системы (4) при $c = 4$.

На рисунке 2 представлены графики $z(t)$ при разных значениях c.

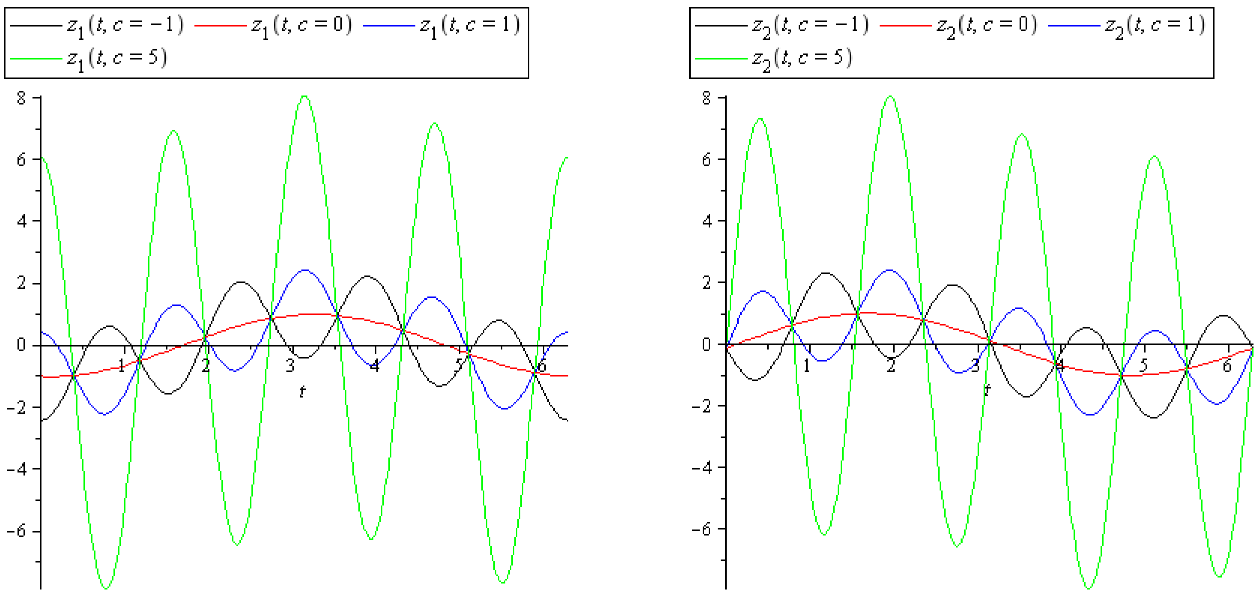

Рис. 2. Графики компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$ решения системы (4) при различных c.

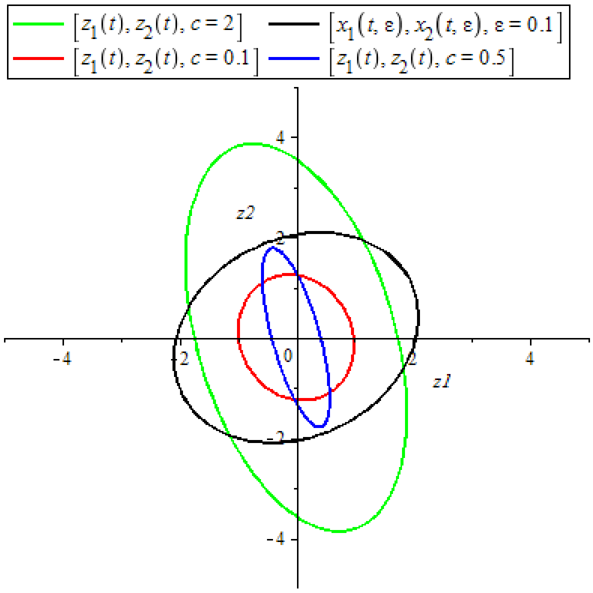

Рис. 3. $k = 1$: графики периодических траекторий системы (1) при $\varepsilon = 0{,}1$ и системы (4) при различных c.

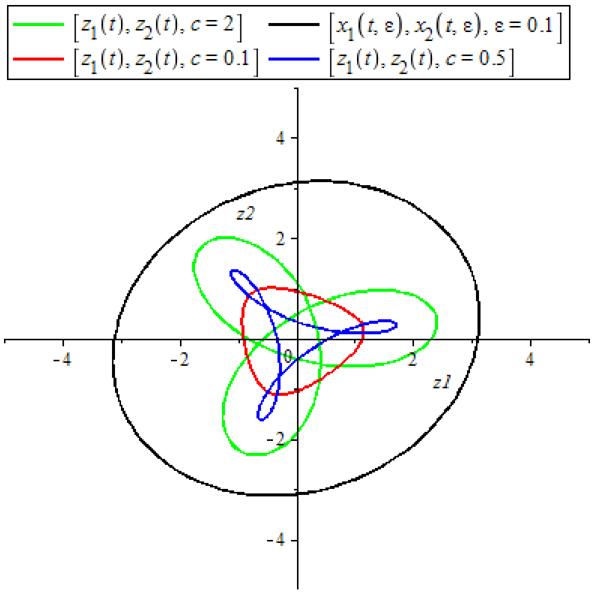

Рис. 4. $k = 2$: графики периодических траекторий системы (1) при $\varepsilon = 0{,}1$ и системы (4) при различных c.

Таким образом, для класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) с малым линейным возмущением построены периодические решения в резонансном случае. Показано, что в случае, когда малый параметр равен нулю, появляется однопараметрическое семейство периодических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмого оператора // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 3. – С. 100–107.
2. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 4. – С. 33–40.
3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 45–53.
4. Шаманаев П. А., Логинов Б. В., Кадрякова М. Р. О периодическом решении одной линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости с малым параметром // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2016. – С. 3–7.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1996. – 532 с.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 524 с.