

**ЖАЛНИН Р. В., ЛАДОНКИНА М. Е., МАСЯГИН В. Ф., ТИШКИН В. Ф.**  
**О ПРИМЕНЕНИИ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**  
**ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ<sup>1</sup>**

**Аннотация.** В статье описана численная методика для решения однофазной задачи нестационарной фильтрации жидкости в анизотропной среде на основе метода Галёркина с разрывными базисными функциями на неструктурированной сетке. Численная схема рассматривается на примере начально-краевой задачи для двумерной задачи однофазной фильтрации. Результаты расчетов тестовых задач показывают хорошую точность предлагаемого метода.

**Ключевые слова:** нестационарная фильтрация, уравнения параболического типа, треугольные сетки, разрывный метод Галёркина.

**ZHALNIN R. V., LADONKINA M. E., MASYAGIN V. F., TISHKIN V. F.**  
**APPLICATION OF DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR SOLVING**  
**ONE-PHASE FILTRATION PROBLEM IN ANISOTROPIC MEDIA**

**Abstract.** The article considers the application of discontinuous Galerkin method for one-phase filtration problem in anisotropic media. For the numerical experiment the initial-boundary problem for two-dimensional one-phase filtration is chosen. Calculations of the modeling problems demonstrate a high degree accuracy of the offered method.

**Keywords:** unsteady filtration, parabolic equations, triangle grid, discontinuous Galerkin method.

### **1. Постановка задачи**

Рассмотрим в общем случае фильтрацию жидкости в анизотропной среде. В работе [4] было показано, что абсолютную проницаемость можно представить как тензор второго ранга, его свертка с градиентом давления – есть скорость фильтрации, с точностью до множителя (вязкость жидкости):

$$v_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где  $k_{ij}$  – тензор проницаемости.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31260 мол\_а).

Учитывая уравнение неразрывности для жидкости в пористой среде [2; 5] и (1) получим:

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = w, \quad (2)$$

где  $p$  – давление,  $m = m(p)$  – пористость,  $\rho = \rho(p)$  – плотность жидкости,  $w$  – распределенный источник массы. Пусть плотность жидкости и пористость связаны с давлением следующими соотношениями:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \text{const} = C_f$ ,  $\frac{\partial m}{\partial p} = \text{const} = C_m$ , где  $C_f, C_m$  – коэффициенты изотермической фильтрации. Тогда уравнение (1) можно переписать относительно давлений [6]:

$$\mu(C_m + mC_f) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = w. \quad (3)$$

Уравнение (3) является в общем случае нелинейным в связи с зависимостью пористости от давления, однако в [6] показано, что если в качестве пористости рассматривать пористость при начальном пластовом давлении  $m_0$ , которая не зависит от давления, то это не внесет больших погрешностей, а уравнение (3) становится линейным.

$$\mu(C_m + m_0 C_f) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = w. \quad (4)$$

Данное уравнение принято называть уравнением пьезопроводности. Оно описывает изотермическую фильтрацию однофазной жидкости на упругом режиме. Уравнение, впервые полученное для однородного случая в [6] по виду совпадает с уравнением, описывающим распространение тепла. Классические модели интерпретации гидродинамических исследований скважины [7] связаны с решением именно этого уравнения.

## 2. Описание численного алгоритма на основе разрывного метода Галёркина

Зададим множество точек  $\omega_p = \{P_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, \dots, N\}$  в области расчета, которое содержит внутренние и граничные точки области. Для  $\omega_p$  произведем триангуляцию Делоне:  $T(\omega_p) = \{T_k = T(T_k^1, T_k^2, T_k^3), T_k^1, T_k^2, T_k^3 \in \omega_p, k = 1, 2, \dots, M\}$ . В треугольнике  $T_k$  с вершинами в точках  $T_k^1 : \{x_1, y_1\}$ ,  $T_k^2 : \{x_2, y_2\}$ ,  $T_k^3 : \{x_3, y_3\}$  определим центр  $(x_c, y_c)$ :  $x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ ,  $y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ .

Производные второго порядка не могут быть согласованы напрямую в слабой вариационной формулировке, используя пространство разрывных функций. Следовательно, для решения уравнения (4) с помощью разрывного метода Галёркина [3] введем вспомогательные переменные [9]:

$$\omega_x = -\left(k_{xx} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

$$\omega_y = -\left(k_{yx} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

Тогда уравнение (4) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \mu(C_m + m_0 C_f) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial}{\partial y} \omega_y = w, \\ \omega_x = -\left(k_{xx} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial p}{\partial y}\right), \\ \omega_y = -\left(k_{yx} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial p}{\partial y}\right). \end{cases} \quad (5)$$

В каждом треугольнике  $T_k \in T(\omega_p)$  приближенное решение (5) будем искать в виде проекции  $p$  и вспомогательных переменных на пространство полиномов  $P^1(x, y)$  первой степени в базисе  $\{\varphi_i\} \in P^1$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $\varphi_0 = 1$ ,  $\varphi_1 = \frac{x - x_c}{\Delta x}$ ,  $\varphi_2 = \frac{y - y_c}{\Delta y}$ , где  $(x_c, y_c)$  – центр треугольника  $T_k$ ,  $\Delta x, \Delta y$  – проекции треугольника на оси координат.

В каждой ячейке линейная комбинация базисных функций будет определять решение:

$$p_k = p_{0k} + p_{1k} \frac{(x - x_c)}{\Delta x} + p_{2k} \frac{(y - y_c)}{\Delta y}, \quad p_{ik} = p_{ik}(t), \quad (x, y) \in T_k, \quad i = \overline{0, 2},$$

$$\omega_{xk} = \omega_{x0k} + \omega_{x1k} \frac{(x - x_c)}{\Delta x} + \omega_{x2k} \frac{(y - y_c)}{\Delta y}, \quad \omega_{xik} = \omega_{xik}(t), \quad (x, y) \in T_k, \quad i = \overline{0, 2},$$

$$\omega_{yk} = \omega_{y0k} + \omega_{y1k} \frac{(x - x_c)}{\Delta x} + \omega_{y2k} \frac{(y - y_c)}{\Delta y}, \quad \omega_{yik} = \omega_{yik}(t), \quad (x, y) \in T_k, \quad i = \overline{0, 2},$$

Определим коэффициенты разложения  $p_k, \omega_{xk}, \omega_{yk}$  из условия ортогональности невязки пробным функциям  $\varphi_i$  на каждом треугольнике  $T_k$  [10]:

$$\begin{aligned} & \left[ \mu(C_m + m_0 C_f) \right]_k \sum_{i=0}^2 \frac{\partial p_{ik}}{\partial t} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m dS + \oint_{\partial T_k} n_x \hat{\omega}_x \varphi_m dl + \oint_{\partial T_k} n_y \hat{\omega}_y \varphi_m dl - \int_{T_k} \omega_{xk} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dS - \\ & - \int_{T_k} \omega_{yk} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dS = \int_{T_k} W_k \varphi_m dS, \quad m = \overline{0, 2}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^2 \omega_{xik} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m dS = - \oint_{\partial T_k} n_x k_{xx} p \varphi_m dl - \oint_{\partial T_k} n_y k_{xy} p \varphi_m dl + \int_{T_k} p_k \frac{\partial(k_{xx} \varphi_m)}{\partial x} dS + \int_{T_k} p_k \frac{\partial(k_{xy} \varphi_m)}{\partial y} dS,$$

$$m = \overline{0,2}, \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^2 \omega_{yik} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m dS = - \oint_{\partial T_k} n_x k_{yx} p \varphi_m dl - \oint_{\partial T_k} n_y k_{yy} p \varphi_m dl + \int_{T_k} p_k \frac{\partial(k_{yx} \varphi_m)}{\partial x} dS + \int_{T_k} p_k \frac{\partial(k_{yy} \varphi_m)}{\partial y} dS,$$

$$m = \overline{0,2}, \quad (8)$$

Потоковые значения величин на границе ячейки предлагается вычислять аналогично тому, как это сделано для уравнения теплопроводности [8], используя стабилизирующие добавки. Для вычисления потоковых значений внутри расчетной области имеем:

$$\hat{\omega}_x(p^+, \omega_x^+, p^-, \omega_x^-, n) = \frac{\omega_x^+ + \omega_x^-}{2} - C_1(p^+ - p^-)n_x,$$

$$\hat{\omega}_y(p^+, \omega_y^+, p^-, \omega_y^-, n) = \frac{\omega_y^+ + \omega_y^-}{2} - C_1(p^+ - p^-)n_y,$$

$$\hat{p} = \frac{p^+ - p^-}{2},$$

на границе расчетной области брались следующие значения:

$$\hat{\omega}_x(p^+, \omega_x^+, n) = \omega_x^+ - C_1(p^+ - g)n_x,$$

$$\hat{\omega}_y(p^+, \omega_y^+, n) = \omega_y^+ - C_1(p^+ - g)n_y,$$

$$\hat{p} = g,$$

где  $p^-, \omega_x^-, \omega_y^-$  – значения величин из ячейки, для которой нормаль  $n$  является внутренней,  $p^+, \omega_x^+, \omega_y^+$  – значения величин из ячейки, для которой нормаль  $n$  является внешней,  $g$  – граничное условие Дирихле,  $C_1$  брали порядка  $O(1/h)$ , где  $h$  – диаметр ячейки.

### 3. Примеры расчетов

Была рассмотрена первая краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} W = 0, \quad r \in D,$$

$$W = -\hat{K} \nabla u,$$

$$u|_{t=0} = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad u|_{\partial D} = 0,$$

где область  $D$  представляет собой единичный квадрат на плоскости  $OXY$  с координатами вершин  $(0;0)$ ,  $(0;1)$ ,  $(1;0)$ ,  $(1;1)$ . Матрица тензора проницаемости симметричная

положительно-определенная. Тензор проницаемости имеет диагональный вид  $\hat{K} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ,

где  $a$  и  $b$  постоянны на всей области  $D$ . Методом разделения переменных можно найти точное решение задачи:  $U = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\exp[-(a+b)\pi^2 t]$ . В первом случае коэффициент проницаемости брали  $\hat{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , во втором равным  $\hat{K} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . На рисунках показан модуль разности между численным и точным решением в центре ячеек расчетной области.

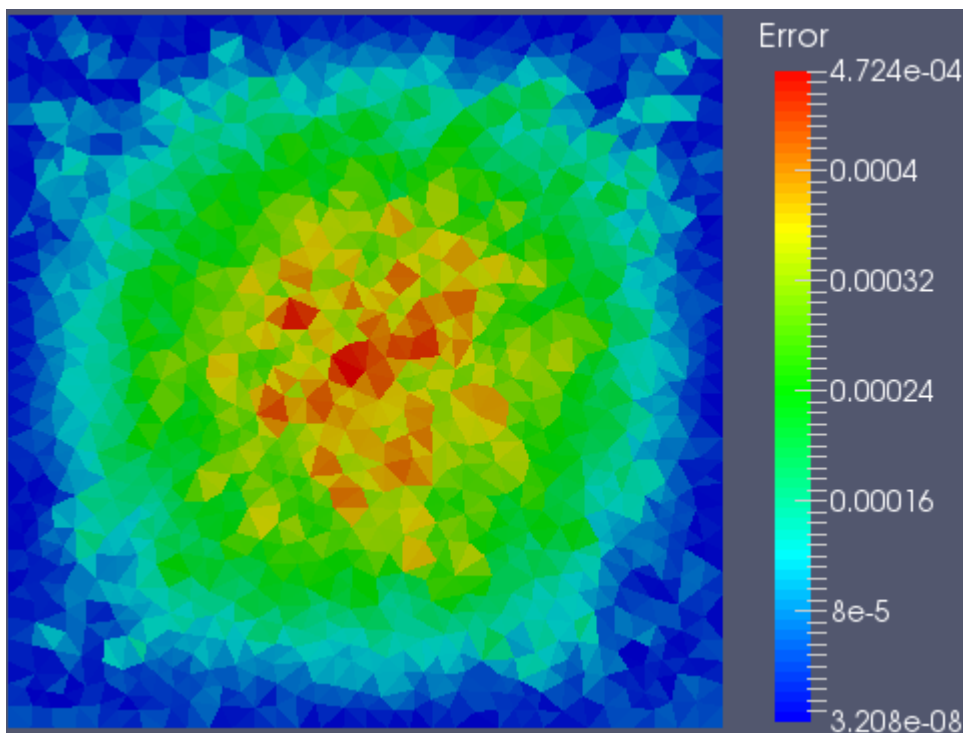


Рис. 1. Случай 1,  $t = 0.1$

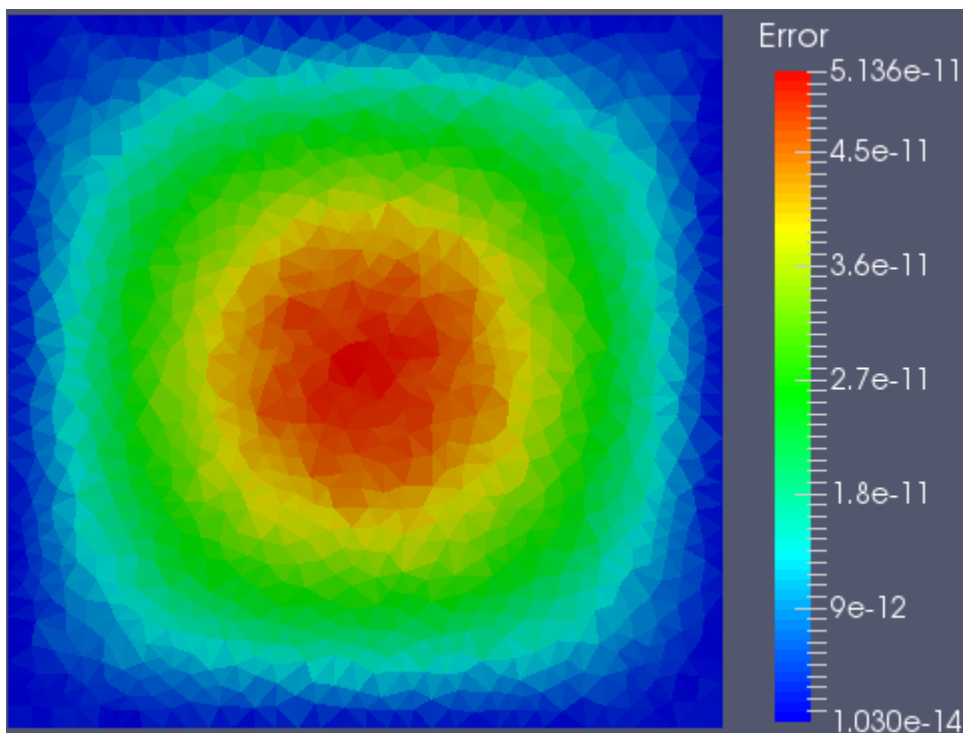


Рис. 2. Случай 1,  $t = 1.0$

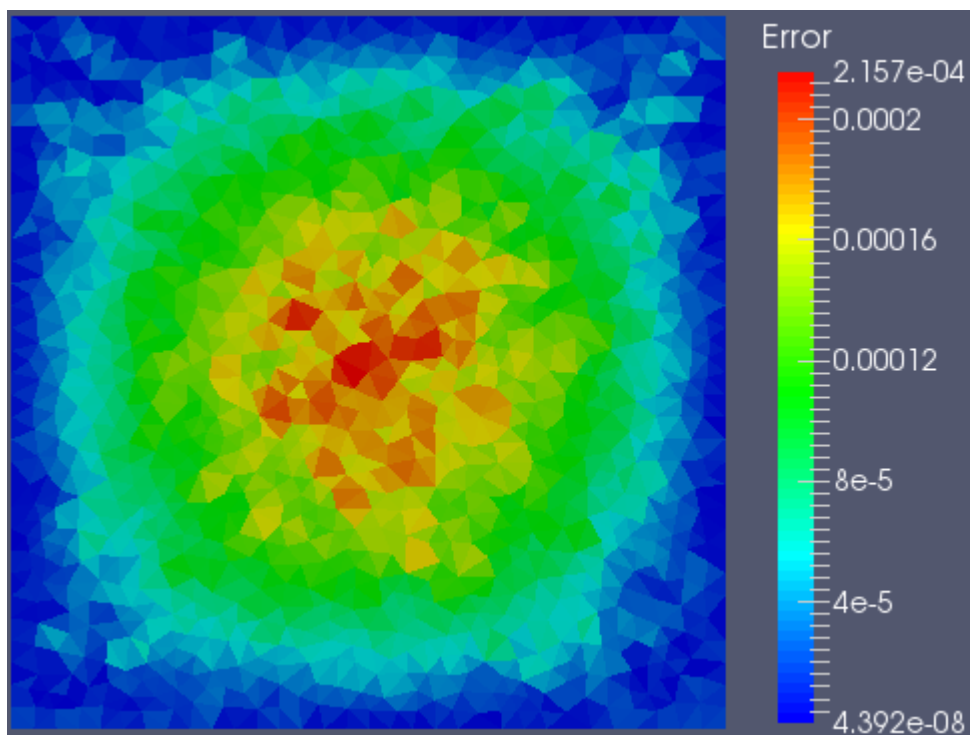


Рис. 3. Случай 2,  $t = 0.1$

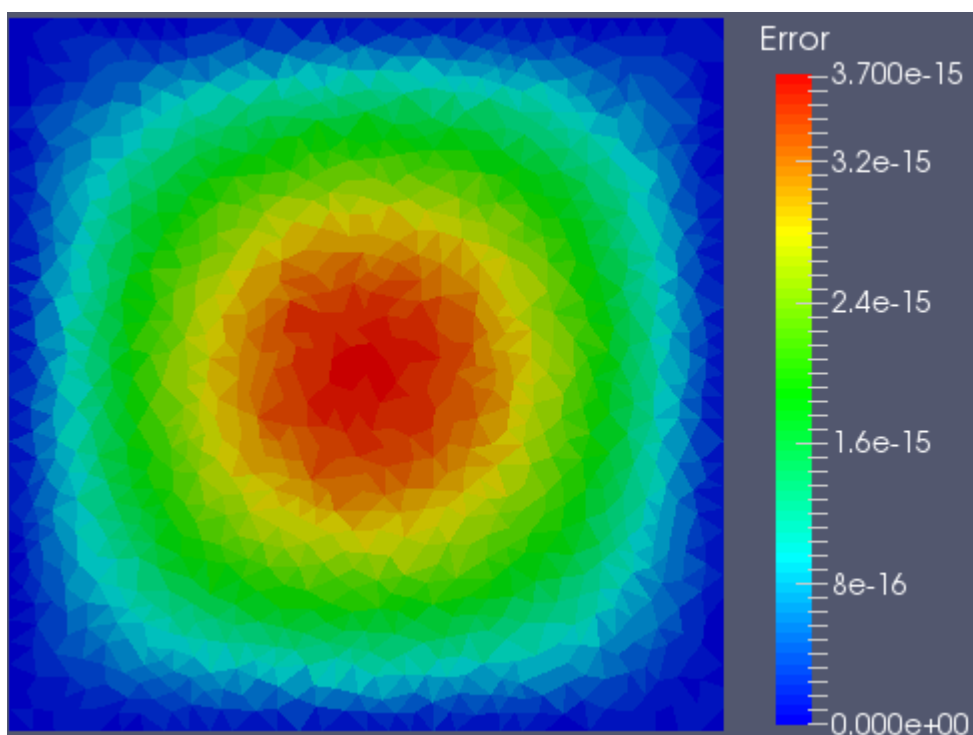


Рис. 4. Случай 2,  $t = 1.0$

### Выводы

Результаты расчетов показали возможность применения описанного в данной работе численного алгоритма для решения задач однофазной фильтрации в анизотропных средах разрывным методом Галёркина.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Масыгин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. О применении разрывного конечно-элементного метода Галёркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 59–65.
2. Кондауров В. И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 310 с.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / Пер. с английского. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
4. Хасанов М. М., Мукминов И. Р., Бачин С. И. К расчету притока жидкости к скважинам, работающим в условиях локального разгазирования // Нефтепромысловое дело. – 2000. – № 8-9. – С. 2–9.
5. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.
6. Щелкачев В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации: Монография: В 2 ч. – Ч. 1. – М.: Нефть и газ, 1995. – 586 с.
7. Эрлагер Р. Гидродинамические исследования скважин. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 512 с.
8. Arnold D. N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L. D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2002. – Vol. 29. – pp. 1749–1779.
9. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations // J. Comput. Phys. – 1997. – Vol. 131. – pp. 267–279.
10. Cockburn B., Shu C.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // J. Sci. Comp. – 2001. – Vol. 3. – pp. 173–261.