

**МАСЯГИН В. Ф., ПАНЮШКИНА Е. Н., ПЕСКОВА Е. Е.
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ CUDA**

Аннотация. В работе описан численный алгоритм решения уравнений газовой динамики. Представлены этапы реализации алгоритма на языке CUDA C. Для численного эксперимента была выбрана задача Римана о распаде произвольного разрыва в двумерной постановке с начальными данными Сода. Приведенные численные результаты демонстрируют качество распараллеливания и возможности разработанной параллельной версии программы.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, параллельный алгоритм, технология CUDA.

**MASYAGIN V. F., PANYUSHKINA E. N., PESKOVA E. E.
THE SOLUTION OF GAS DYNAMICS EQUATIONS
USING CUDA TECHNOLOGY**

Abstract. The article presents a numerical algorithm for solving the equations of gas dynamics. The stages of implementation of the algorithm in the language of CUDA C are described. The two-dimensional Sod's Riemann problem was chosen for the numerical experiment. The results of the test problem solution demonstrate the parallelization quality and the capability of parallel version.

Keywords: gas dynamics equations, parallel algorithm, CUDA technology.

Введение.

Задачи вычислительной газовой динамики приобретают все большую важность и актуальность во многих областях современной науки и техники. Моделирование таких задач связано с требованием высокой точности результатов, которая при фиксированной расчетной области может наращиваться как путем измельчения используемых сеток, так и повышением точности численных алгоритмов. Оба пути ведут к увеличению расчетного времени. Решением проблем вычислительных ресурсов является использование и внедрение технологий параллельного программирования. В статье рассматривается численное решение двумерных уравнений газовой динамики с использованием технологии CUDA.

1. Математическая модель и дискретизация.

Система уравнений газовой динамики может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F^2(U)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}) \end{pmatrix}; F^1(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}) + pu \end{pmatrix}; F^2(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}) + pv \end{pmatrix}.$$

Система дополнена уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$.

Здесь ρ, p, ε – плотность, давление и удельная внутренняя энергия соответственно, u, v – компоненты вектора скорости, γ – показатель адиабаты.

Алгоритм строим на неструктурированной треугольной сетке $\omega = \{P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$, содержащей все внутренние и граничные точки расчетной области. На ω построим триангуляцию Делоне $\Delta(\omega) = \{\Delta_m = \Delta(P_{i_m}, P_{j_m}, P_{k_m}), P_{i_m}, P_{j_m}, P_{k_m} \in \omega, m = 1, 2, \dots, M\}$.

Схема для численного решения системы уравнений газовой динамики может быть представлена в виде:

$$\frac{d}{dt} U_i(t) + \frac{1}{|\Delta_i|} \int_{\partial\Delta_i} F \cdot n ds = 0. \quad (2)$$

Здесь $F = (F^{(1)}, F^{(2)})^T$, n – внешняя нормаль к ребру ячейки $\partial\Delta_i$. Интеграл $\int_{\partial\Delta_i} F \cdot n ds$ рассчитываем с помощью квадратурной формулы Гаусса [1]:

$$\int_{\partial\Delta_i} F \cdot n ds \approx \sum_{k=1}^3 |\partial\Delta_i| \sum_{j=1}^q \omega_j F(u^+(G_j^{(k)}, t), u^-(G_j^{(k)}, t)) \cdot n_k, \quad (3)$$

где $F(u^+(G_j^{(k)}, t), u^-(G_j^{(k)}, t)) \cdot n_k$ – дискретные потоки, которые рассчитываются по схеме распада разрыва [2], $u^+(G_j^{(k)}, t), u^-(G_j^{(k)}, t)$ – «левые» и «правые» значения вектора U на границе ячейки.

Используем двухточечную квадратуру Гаусса $q=2$. Для ребра треугольника с координатами P_1 и P_2 , точки Гаусса определяем следующим образом [3]:

$$G_1 = cP_1 + (1-c)P_2, G_2 = cP_2 + (1-c)P_1, \text{ где } c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для нахождения газодинамических параметров в ячейке Δ_i на следующем шаге по времени используем формулу:

$$U_i^{n+1} = \Delta t \left(U_i^n - \frac{1}{S_{\Delta_i}} \sum_{k=1}^3 |\partial \Delta_i| \sum_{j=1}^2 \omega_j F(u^+(G_j^{(k)}, t), u^-(G_j^{(k)}, t)) \cdot n_k \right). \quad (4)$$

2. Реализация алгоритма на языке CUDA C.

Для проведения расчетов на GPU было сделано [4]:

- выделение памяти для данных и потоков на GPU;
- копирование данных на GPU;
- распределение ядер для вычисления;
- копирование полученных данных обратно в CPU;
- освобождение памяти GPU.

3. Исследовательские расчеты и оценка быстродействия.

Была проведена серия тестовых расчетов для задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Расчеты были выполнены в двумерной постановке для начальных данных Сода [5]:

$$(\rho_1, u_1, v_1, p_1) = (1, 0, 0, 1), (\rho_2, u_2, v_2, p_2) = (0.125, 0, 0, 0.1).$$

Здесь ρ_1, u_1, v_1, p_1 и ρ_2, u_2, v_2, p_2 – плотность, компоненты вектора скорости и давление в канале слева и справа соответственно.

Задача рассматривалась в области $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Разрыв располагался вдоль прямой $x = 0$. Расчет производился до времени $t = 0.2$ с шагом $\Delta t = 10^{-4}$.

На рисунках представлены значения плотности (рис. 1), скорости (рис. 2) и давления (рис. 3), которые хорошо согласуются с полученными ранее решениями этой задачи [6].

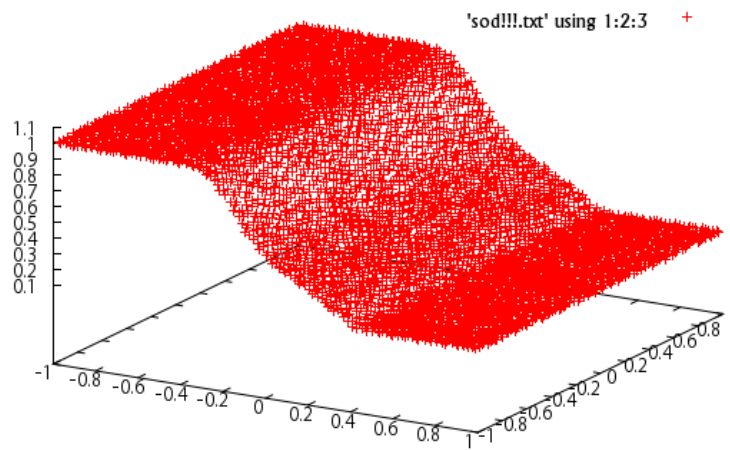


Рис 1. Плотность.

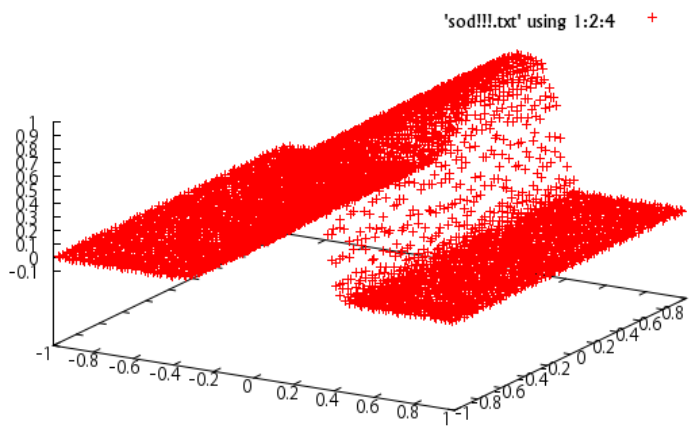


Рис. 2. Скорость.

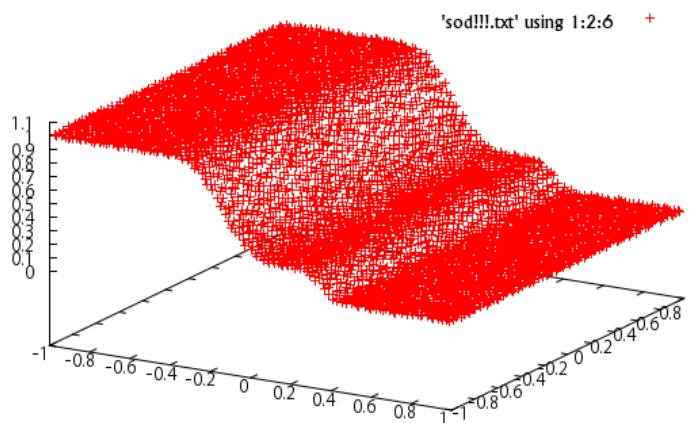


Рис. 3. Давление.

Была проведена серия расчетов на последовательности сгущающихся сеток. В таблице 1 представлено время работы последовательной и параллельной программ и ускорение, получаемое за счет использования GPU. Как видно из расчетов, с ростом количества ячеек расчетной области становится более выгодно использовать GPU.

Таблица 1

Количество ячеек	CPU (Intel Core i7-4500U 1.80GHz), с.	GPU (NVidia GeForce GT740M), с.	Ускорение, раз
4291	22.8	5.0	4.56
8582	45.0	7.7	5.84
17031	89.1	12.7	7.02
33948	179.5	22.6	7.94

Заключение

В работе построен параллельный алгоритм численного решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках с использованием технологии CUDA. С помощью разработанных программ были проведены расчеты на последовательности сгущающихся сеток.

Как видно из результатов расчетов, с ростом количества ячеек в расчетной области становится более выгодно использовать параллельную версию программы на основе технологии CUDA.

ЛИТЕРАТУРА

1. Li B. Q. Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer. – Berlin: Springer, 2006. – 578 p.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
3. Hu C., Shu C.-W. Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes on Triangular Meshes // Journal of Computational Physics. – 1999. – Vol. 150, № 1. – pp. 97–127.
4. Сандерс Дж., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 232 с.
5. Sod G. A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. – 1978. – Vol. 27. – pp. 1–31.
6. Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19. – № 10. – С. 61–66.