ЖАЛНИН Р. В., МАСЯГИН В. Ф., САЛЬНИКОВ В. Д.

НЕЯВНАЯ СХЕМА, ОСНОВАННАЯ НА РАЗРЫВНОМ МЕТОДЕ ГАЛЁРКИНА, ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ[1]

Аннотация. В статье описана неявная противопоточная схема, основанная на разрывном методе Галёркина для моделирования течений идеального сжимаемого газа в трехмерном случае. Сеточные уравнения записаны относительно приращения для удобства их решения с помощью подпрограмм библиотеки HYPRE.

Ключевые слова: газовая динамика, численное моделирование, уравнение Эйлера.

ZHALNIN R. V., MASYAGIN V. F., SALNIKOV V. D.

IMPLICIT SCHEME BASED ON DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR COMPRESSIBLE GAS FLOWS 3D SIMULATION

Abstact. The article describes the implicit upwind scheme based on discontinuous Galerkin method for compressible gas flows 3D simulation. The scheme is written relative increment to simplify the solution by using of the HYPRE modules.

Keywords: gas dynamics, numerical simulation, Euler equation.

В настоящее время для решения задач моделирования течений сжимаемого газа используются или конечно-объемные вычислительные алгоритмы высокого порядка точности [4], или конечно-элементные методы, основанные на методе Галеркина с разрывными базисными функциями [1], который также характеризуется высоким порядком точности получаемого решения и обладает меньшими требованиями к качеству сетки. В статье [5] описывается неявная схема, основанная на разрывном методе Галеркина для решения задач газовой динамики в общем виде. В этой статье подробно расписана разностная схема для трехмерного случая.

1. Основные уравнения

В основе математической модели теории движения газа и жидкости лежат законы сохранения массы, импульса и энергии. В трехмерной декартовой системе координат течение сжимаемого идеального невязкого газа описывает уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=0, \tag{1.1}$$

уравнение состояния представлено в форме:

$$p=\varepsilon\rho(\gamma-1), \tag{1.2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31260 мол_а).

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, F_x(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, F_y(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho uw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, F_z(U) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Здесь t – время; ρ – плотность; p – давление; (u, v, w) – составляющие скорости в координатных направлениях (x, y, z); ε – внутренняя энергия единицы массы; $E = \varepsilon + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}$ – полная энергия единицы массы; $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – показатель адиабаты; C_p – теплоемкость при постоянном давлении; C_v – теплоемкость при постоянном объеме.

2. Численный метод

В основу численного алгоритма положен разрывный метод Галеркина. Для применения разрывного метода Галеркина покроем область Ω, на которой ищется решение, тетраэдральной сеткой T_h. На каждом элементе T_mприближенное решение системы уравнений (1.1-2) будем искать в виде полиномов $P(\mathrm{X})$ степени p с зависящими от времени коэффициентами:

$$U_{h|m}^n(\bar{x}, t) = \sum_{i=0}^{st} U_{i|m}(t)\varphi_{i|m}(\bar{x}), \bar{x} = (x, y, z), \tag{2.1}$$

где st – размерность пространства полиномов, а $\varphi_{i|m}(\bar{x})$ – соответствующая базисная функция на m-ой ячейки.

Приближенное решение системы (1.1-2) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [1]:

$$\int_{T_m} \frac{\partial U_{h|m}}{\partial t}\varphi_{k|m} dxdydz + \int_{T_m}\left(\frac{F_x(U_{h|m})}{\partial x} + \frac{F_y(U_{h|m})}{\partial y} + \frac{F_z(U_{h|m})}{\partial z}\right)\varphi_{k|m} dxdydz = 0, k = \overline{0, st} \tag{2.2}$$

Преобразовав (2.2) получим:

$$\sum_{i=0}^{st}\left(\frac{\partial U_{i|m}}{\partial t}\int_{T_m}\varphi_{i|m}\varphi_{k|m} dxdydz\right) + \oint_{\partial T_m}\left(F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z\right)\varphi_{k|m} dS$$
$$- \int_{T_m}\left(F_x \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z}\right) dxdydz = 0, k = \overline{0, st} \tag{2.3}$$

Теперь можно записать неявную схему по времени t в полу дискретном виде:

$$\sum_{i=0}^{st}\left(\int_{T_m}\varphi_{i|m}\varphi_{k|m} dxdydz \frac{\Delta U_{i|m}^{n+1}}{\tau}\right) + \oint_{\partial T_m}\left(F_x^{n+1} n_x + F_y^{n+1} n_y + F_z^{n+1} n_z\right)\varphi_{k|m} dS$$
$$- \int_{T_m}\left(F_x^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z}\right) dxdydz = 0, k = \overline{0, st} \tag{2.4}$$

где

$$\frac{\partial U_{i|m}}{\partial t} \approx \frac{U_{i|m}^{n+1} - U_{i|m}^n}{\tau} = \frac{\Delta U_{i|m}^{n+1}}{\tau}, \tag{2.5}$$

$n = (n_x, n_y, n_z)$ – вектор единичной нормали по границе ∂T_m.

Потоки через грань контрольного объема вычисляются на основе приближенного решения задачи Римана [3].

Рассмотрим линеаризацию потоковой функции:

$$F_{x_{h|mp}}^{n+1} = F_x\left(U_{h|mp}^{n+1}\right) = F_{x_{h|mp}}^{n} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{h|mp}^{n} \left(U_{h|mp}^{n+1} - U_{h|mp}^{n}\right), \quad (2.6)$$

где $U_{h|mp}^{n}$ – осредненное по Роу [2] значение между $U_{h|m}^{n}$ и$\widetilde{U_{h|mp}^{n}}$; $\widetilde{U_{h|mp}^{n}} = U_{h|k}^{n}$– такое переобозначение, когдаk-ая ячейка является соседней с m-ой ячейкой, и для них обоих p-ая граница m-ой ячейки является общей.

Матрица Якоби $\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)$ обладает набором действительных собственных значений и векторов, и поэтому может быть представлена в виде:

$$A = R\Lambda L = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)L = A^+ + A^-,$$

$$A^+ = R\Lambda^+ L,$$

$$A^- = R\Lambda^- L, \quad (2.7)$$

где $\Lambda = diag\{\lambda_i\}$, $\Lambda^+ = \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|)$, $\Lambda^- = \frac{1}{2}(\Lambda - |\Lambda|)$, $|\Lambda| = diag\{|\lambda_i|\}$.

Опираясь на этот факт, для того чтобы сконструировать противопоточную разностную схему в дельта-форме, представим разложение (2.6) в виде:

$$F_{x_{h|mp}}^{n+1} = F_{x_{h|mp}}^{n} + \langle\frac{\partial F_x}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{+}{n}} \Delta U_{h|m}^{n+1} + \langle\frac{\partial F_x}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{-}{n}} \Delta\widetilde{U_{h|mp}^{n+1}}. \quad (2.8)$$

Таким образом, поверхностный интеграл из (2.4) может быть записан следующим образом:

$$\oint_{\partial T_m} \left(F_x^{n+1} n_x + F_y^{n+1} n_y + F_z^{n+1} n_z\right) \varphi_{k|m} dS =$$

$$\sum_{p=1}^{4} S_{mp} * \left[\langle n_{x_{mp}} \left(F_{x_{h|mp}}^{n} + \langle\frac{\partial F_x}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{+}{n}} \Delta U_{h|m}^{n+1} + \langle\frac{\partial F_x}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{-}{n}} \Delta\widetilde{U_{h|mp}^{n+1}}\right) + n_{y_{mp}}(.) + n_{z_{mp}}(.)\rangle \varphi_{k|m}\right] =$$

$$\sum_{p=1}^{4} S_{mp} * \left[\left(\langle\frac{\partial F_x}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{+}{n}} n_{x_{mp}} + \langle\frac{\partial F_y}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{+}{n}} n_{y_{mp}} + \langle\frac{\partial F_z}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{+}{n}} n_{z_{mp}}\right) \varphi_{k|m}\right] \Delta U_{h|m}^{n+1} +$$

$$\sum_{p=1}^{4} S_{mp} * \left[\left(\langle\frac{\partial F_x}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{-}{n}} n_{x_{mp}} + \langle\frac{\partial F_y}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{-}{n}} n_{y_{mp}} + \langle\frac{\partial F_z}{\partial U}\rangle_{h|mp}^{\overset{-}{n}} n_{z_{mp}}\right) \varphi_{k|m}\right] \Delta\widetilde{U_{h|mp}^{n+1}} +$$

$$\sum_{p=1}^{4} S_{mp} * \left[\left(F_{x_{h|mp}}^{n} + F_{y_{h|mp}}^{n} + F_{z_{h|mp}}^{n}\right) \varphi_{k|m}\right], k = \overline{0, st} \quad (2.9)$$

где знак * означает операцию численного интегрирования.

Объемный интеграл, так может быть расписан следующим образом:

$$\int_{T_m} \left(F_x^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$\int_{T_m} \left(F_x^{n} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y^{n} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z^{n} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dxdydz +$$

$$\int_{T_m} \left(\left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)^n \Delta U_{h|m}^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial U}\right)^n \Delta U_{h|m}^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial U}\right)^n \Delta U_{h|m}^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$\int_{T_m} \left(F_x^{n} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y^{n} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z^{n} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dxdydz +$$

$$\sum_{i=0}^{st} \left[\int_{T_m} \varphi_{i|m} \left(\left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial U}\right)^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial U}\right)^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dxdydz \, \Delta U_{i|m}^{n+1} \right], k = \overline{0, st} \qquad (2.10)$$

Для решения линейной системы уравнений применяется один из методов решения СЛАУ библиотеки HYPRE [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection // Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics). – 1998. – Vol. 1697. – pp. 151–268.
2. Roe P. L. Approximate Rieman Solvers, Parameters Vectors and Difference Schemes // Journal of Computations Physics. – 1981. – Vol. 43. – pp. 357–378.
3. Toro E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. – Verlag: Springer, 1999. – 624 p.
4. Жалнин Р. В. О построении параллельного вычислительного алгоритма для прямого численного моделирования сложных газодинамических течений // Журнал Средневолжского математического общества. – 2008. – № 10. – С. 137–146.
5. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Сальников В. Д., Пескова Е. Е. Решение задач газовой динамики с использованием неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. (Россия, г. Пенза, 28-31 октября 2014 г.) / под ред. И. В. Бойкова. – Пенза: Изд- во ПГУ, 2014. – С. 100–104.

6. Chow E., Cleary A. J., Falgout R. D. Design of the HYPRE Preconditioner Library // Proc. of the SIAM Workshop on Object Oriented Methods for Inter-operable Scientific and Engineering Computing (Workshop held at the IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY, October 21-23, 1998). – SIAM, Philadelphia, PA, 1998.