КЯШКИН А. А., ШАМАНАЕВ П. А.

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Аннотация. В статье с использованием метода Ляпунова-Шмидта найдено семейство периодических решений для уравнения колебаний математического маятника. Получено асимптотическое разложение периода решений по малому параметру.

Ключевые слова: уравнение колебаний математического маятника, периодические решения, метод Ляпунова-Шмидта.

KYASHKIN A. A., SHAMANAEV P. A.

FINDING PERIODIC SOLUTIONS FOR THE EQUATION OF MATHEMATICAL PENDULUM OSCILLATIONS

Abstract. The article presents a family of periodic solutions for the equation of mathematical pendulum oscillations found by the method of Lyapunov-Schmidt. An asymptotic expansion of the period of solutions in the small parameter is obtained.

Keywords: equation of mathematical pendulum oscillations, periodic solution, Lyapunov-Schmidt method.

Рассмотрим модельный пример – уравнение колебаний математического маятника [2]

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \sin z = \varepsilon \cdot f\left(z, \frac{dz}{dt}\right). \tag{1}$$

Ответвляющиеся от $z \equiv 0$ $\frac{2\pi}{1+\mu}$ – периодические решения уравнения (1) рассматриваются как решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + \dfrac{x_1^3}{3!} - \dfrac{x_1^5}{5!} + \ldots + \varepsilon \cdot \sum\limits_{j_1+j_2 \geq 1} a_{j_1 j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2}, \end{cases} \tag{2}$$

где $x_1 = z$.

С учетом обозначений $R(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{x_1^3}{3!} + \dfrac{x_1^5}{5!} - \ldots - \varepsilon \cdot \sum\limits_{j_1+j_2 \geq 1} a_{j_1 j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, система (2) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = Bx - R(x,\varepsilon), \tag{3}$$

где $B : E_1 \mapsto E_2$.

После применения подстановки А. Пуанкаре $t = \dfrac{\tau}{1+\mu}$, где $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, получаем $x(t)\big|_{t=\frac{\tau}{1+\mu}} = x\left(\dfrac{\tau}{1+\mu}\right) \overset{\text{def}}{=} y(\tau)$. Тогда система (3) перепишется в виде

$$\boldsymbol{B}\,y = \mu C y + R(y,\varepsilon), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{B}y \equiv (B-C)y$, $Cy \equiv y'(\tau)$, $\boldsymbol{B} : \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_k = E_k + iE_k$, $k = \overline{1,2}$. Множество нулей оператора $\boldsymbol{B}$ имеет вид $N(\boldsymbol{B}) = \{\varphi(\tau), \overline{\varphi}(\tau)\}$, где $\varphi(\tau) = \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\tau}$, $\overline{\varphi}(\tau) = \overline{\varphi} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\tau}$.

Рассмотрим также сопряженные операторы $B^* : E_2^* \mapsto E_1^*$ и $\boldsymbol{B}^* : \mathcal{E}_2^* \mapsto \mathcal{E}_1^*$, $\mathcal{E}_k^* = E_k^* + iE_k^*$, $k = \overline{1,2}$. Множество нулей сопряженного оператора имеет вид $N(\boldsymbol{B}^*) = \{\psi(\tau), \overline{\psi}(\tau)\}$, где $\psi(\tau) = \psi = \varphi$, $\overline{\psi}(\tau) = \overline{\psi} = \overline{\varphi}$.

Согласно следствию из теоремы Хана-Банаха в $\mathcal{E}_1^*$ существуют функционалы γ_1 , γ_2 такие, что [1, с. 337]

$$\left\langle\left\langle \varphi_i , \gamma_j \right\rangle\right\rangle = \delta_{i,j}\ ,\ i,j = \overline{1,2}.$$

По тому же следствию из теоремы Хана-Банаха в $\mathcal{E}_2$ существуют элементы z_1 , z_2 такие, что

$$\left\langle\left\langle z_k , \psi_s \right\rangle\right\rangle = \delta_{k,s}\ ,\ k,s = \overline{1,2}.$$

Здесь $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \overline{\varphi}$; $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \overline{\psi}$; а $\left\langle\left\langle f,g \right\rangle\right\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left\langle f(\tau), g(\tau) \right\rangle d\tau$ – значение функционала $g(\tau)$ на элементе $f(\tau)$. Используя лемму о биортогональности, получим $\gamma_i = \psi_i = z_i = \varphi_i$, $i = \overline{1,2}$.

Решение системы (4) будем искать по обобщенной лемме Шмидта. Введем оператор

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}y \equiv \boldsymbol{B}y + \sum_{i=1}^{2} \xi_i z_i\ ,$$

где

$$\xi_j = \left\langle\left\langle y, \gamma_j \right\rangle\right\rangle,\ j = 1,2\ , \tag{5}$$

$$\xi_1 = \xi\ ,\ \xi_2 = \overline{\xi}\ , \tag{6}$$

и запишем (4) в эквивалентной форме

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}y = \mu Cy + R(y,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{2} \xi_i z_i. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) представим в виде

$$y = w + \sum_{i=1}^{2} \xi_i \varphi_i , \tag{8}$$

где

$$w = w(\xi_1, \xi_2, \mu, \varepsilon) = y_{0010}\mu + y_{0001}\varepsilon + \sum_{k_1+k_2+k+l \ \geq 2} y_{k_1 k_2 k l} \ \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \mu^k \varepsilon^l . \tag{9}$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}w = \mu w' + \mu \xi_1 \varphi_1'(\tau) + \mu \xi_2 \varphi_2'(\tau) + R\left(w + \sum_{i=1}^{2} \xi_i \varphi_i , \varepsilon \right). \tag{10}$$

Подставив ряд (9) в систему (10), методом неопределенных коэффициентов найдем коэффициенты для w, а значит и для y.

Для нахождения системы разветвления подставим полученный ряд (9) в уравнения (5):

$$\sum_{i+j\geq 2} L_{ij00}^{(m)} \xi_1^i \xi_2^j + \sum_{i+j\geq 0} \xi_1^i \xi_2^j \sum_{k+l\geq 1} L_{ijkl}^{(m)} \mu^k \varepsilon^l = 0 , \ m = 1,2 ,$$

где коэффициенты уравнения разветвления задаются так:

$$L_{ijkl}^{(m)} = \left\langle \left\langle y_{ijkl}, \gamma_s \right\rangle \right\rangle, \ m = 1,2 . \tag{11}$$

Для реализации метода неопределенных коэффициентов используется математический пакет Maxima. Для построения системы разветвления ограничимся третьим порядком коэффициентов.

Приведем значения ненулевых коэффициентов:

$$y_{1010} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\tau}, \ y_{0110} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \ y_{1001} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (a_{01}+2a_{10}) + i(2a_{01}-a_{10}) \\ -(2a_{01}+a_{10}) + i(-a_{01}+2a_{10}) \end{pmatrix} e^{i\tau},$$

$$y_{0101} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (a_{01}+2a_{10}) - i(2a_{01}-a_{10}) \\ -(2a_{01}+a_{10}) - i(-a_{01}+2a_{10}) \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \ y_{3000} = \frac{1}{32\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i/3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3i\tau},$$

$$y_{2100} = \frac{1}{16\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2-i \\ -1+2i \end{pmatrix} e^{i\tau}, \ y_{1200} = \frac{1}{16\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2+i \\ -1-2i \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \ y_{0300} = \frac{1}{32\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i/3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3i\tau},$$

$$y_{1020} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\tau}, \ y_{0120} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \ y_{2001} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (a_{20}-a_{02}) + ia_{11} \\ -2a_{11} + i(2a_{20}-2a_{02}) \end{pmatrix} e^{2i\tau}, \ y_{1101} = \begin{pmatrix} a_{20}+a_{02} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y_{0201} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (a_{20}-a_{02}) - ia_{11} \\ -2a_{11} - i(2a_{20}-2a_{02}) \end{pmatrix} e^{-2i\tau},$$

$$y_{1011} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (-9a_{01} + 2a_{10}) + i(2a_{01} + 9a_{10}) \\ (2a_{01} - 7a_{10}) - i(7a_{01} + 2a_{10}) \end{pmatrix} e^{i\tau},$$
$$y_{0111} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (-9a_{01} + 2a_{10}) - i(2a_{01} + 9a_{10}) \\ (2a_{01} - 7a_{10}) + i(7a_{01} + 2a_{10}) \end{pmatrix} e^{-i\tau},$$
$$y_{1002} = \frac{1}{16\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01}) + i(3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2) \\ (-5a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} + 3a_{01}^2) - i(8a_{10}a_{01} - 4a_{01}^2) \end{pmatrix} e^{i\tau},$$
$$y_{0102} = \frac{1}{16\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01}) - i(3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2) \\ (-5a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} + 3a_{01}^2) + i(8a_{10}a_{01} - 4a_{01}^2) \end{pmatrix} e^{-i\tau}.$$

Коэффициенты уравнения разветвления найдем по формуле (11). Приведем ненулевые коэффициенты:

$$L_{1001}^{(1)} = \langle\langle y_{1001}, \gamma_1 \rangle\rangle = -\frac{1}{2}(a_{01} - a_{10}i), \qquad L_{0101}^{(2)} = \langle\langle y_{0101}, \gamma_2 \rangle\rangle = -\frac{1}{2}(a_{01} + a_{10}i),$$
$$L_{1010}^{(1)} = \langle\langle y_{1010}, \gamma_1 \rangle\rangle = i, \qquad L_{0110}^{(2)} = \langle\langle y_{0110}, \gamma_2 \rangle\rangle = -i,$$
$$L_{1002}^{(1)} = \langle\langle y_{1002}, \gamma_1 \rangle\rangle = \frac{1}{4}(a_{01}^2 - a_{10}^2) - \frac{1}{8}i(4a_{01}a_{10} - a_{10}^2 - a_{01}^2),$$
$$L_{0102}^{(2)} = \langle\langle y_{0102}, \gamma_2 \rangle\rangle = \frac{1}{4}(a_{01}^2 - a_{10}^2) + \frac{1}{8}i(4a_{01}a_{10} - a_{10}^2 - a_{01}^2),$$
$$L_{1020}^{(1)} = \langle\langle y_{1020}, \gamma_1 \rangle\rangle = -1, \qquad L_{0120}^{(2)} = \langle\langle y_{0120}, \gamma_2 \rangle\rangle = -1,$$
$$L_{2100}^{(1)} = \langle\langle y_{2100}, \gamma_1 \rangle\rangle = \frac{i}{8}, \qquad L_{1200}^{(2)} = \langle\langle y_{1200}, \gamma_2 \rangle\rangle = -\frac{i}{8},$$
$$L_{1011}^{(1)} = \langle\langle y_{1011}, \gamma_1 \rangle\rangle = -a_{10} - ia_{01}, \qquad L_{0111}^{(2)} = \langle\langle y_{0111}, \gamma_2 \rangle\rangle = -a_{10} + ia_{01}.$$

С учетом (6) и $\xi\bar{\xi} = |\xi|^2$ записываем систему разветвления:

$$\begin{aligned} &\xi\left(-\mu^2 - a_{10}\varepsilon\mu - \frac{1}{4}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}\varepsilon\right) + \\ &\quad + \xi\, i\left(-a_{01}\varepsilon\mu + \mu + \frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon + \frac{1}{8}|\xi|^2\right) = 0, \\ &\bar{\xi}\left(-\mu^2 - a_{10}\varepsilon\mu - \frac{1}{4}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}\varepsilon\right) - \\ &\quad - \bar{\xi}\, i\left(-a_{01}\varepsilon\mu + \mu + \frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon + \frac{1}{8}|\xi|^2\right) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

Рассматриваем первое уравнение системы (12). Решение $\xi = 0$ отвечает тривиальному решению уравнения (1).

Пусть $\xi \neq 0$. После сокращения первого уравнения на ξ и отделения вещественной и мнимой части [2, 3] получим:

$$Re: \quad -\mu^2 - a_{10}\varepsilon\mu - \frac{1}{4}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}\varepsilon = 0,$$
$$Im: \quad -a_{01}\varepsilon\mu + \mu + \frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon + \frac{1}{8}|\xi|^2 = 0.$$

Из второго уравнения выразим μ:

$$\mu = \mu(|\xi|, \varepsilon) = \frac{1}{1 - a_{01}\varepsilon}\left(-\frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon - \frac{1}{8}|\xi|^2\right), \ \varepsilon \neq \frac{1}{a_{01}}. \tag{13}$$

Подставив (13) в первое уравнение, получаем приближенное редуцированное уравнение разветвления:

$$|\xi|^4 + 2\varepsilon^2\left(a_{01}^2 + a_{10}^2\right)|\xi|^2 + \left(a_{10}^4\varepsilon^4 - 15a_{01}^4\varepsilon^4 + 2a_{01}^2a_{10}^2\varepsilon^4 + 64a_{01}^3\varepsilon^3 - 80a_{01}^2\varepsilon^2 + 32a_{01}\varepsilon\right) = 0. \tag{14}$$

Пусть ξ и $\bar{\xi}$ имеют вид [3]: $\xi = r(\varepsilon)e^{i\Theta}$, $\bar{\xi} = r(\varepsilon)e^{-i\Theta}$, где $\Theta \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, $r \equiv r(\varepsilon) = |\xi|$.

Найдем решения биквадратного относительно $|\xi|$ уравнения (14). Очевидно, имеет смысл только корень уравнения:

$$|\xi| = \sqrt{-\varepsilon^2\left(a_{01}^2 + a_{10}^2\right) + 4\sqrt{a_{01}\varepsilon\left(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2\right)}} \tag{15}$$

при условиях

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\left(a_{01}^2 + a_{10}^2\right) + 4\sqrt{a_{01}\varepsilon\left(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2\right)} > 0, \\ a_{01}\varepsilon\left(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2\right) > 0. \end{cases}$$

Подставив (15) в (13), получаем

$$\mu \equiv \mu(r(\varepsilon), \varepsilon) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 - a_{01}\varepsilon}\left(a_{01}a_{10}\varepsilon^2 - a_{10}\varepsilon - \sqrt{a_{01}\varepsilon\left(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2\right)}\right).$$

Подстановка найденных ξ и μ в (9) и (8) дает приближенное однопараметрическое семейство периодических решений системы (4):

$$y(\tau, \varepsilon, \Theta) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} r + \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (a_{01} + 2a_{10})\cos\alpha - (2a_{01} - a_{10})\sin\alpha \\ -(2a_{01} + a_{10})\cos\alpha - (-a_{01} + 2a_{10})\sin\alpha \end{pmatrix} r\varepsilon +$$
$$+ \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} r\mu + \frac{1}{16\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/3\cdot\sin 3\alpha \\ \cos 3\alpha \end{pmatrix} r^3 + \sqrt{2}\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} r\mu^2 +$$
$$+ \frac{1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\cos\alpha + \sin\alpha \\ -\cos\alpha - 2\sin\alpha \end{pmatrix} r^3 + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (a_{20} - a_{02})\cos 2\alpha - a_{11}\sin 2\alpha \\ -2a_{11}\cos 2\alpha - (2a_{20} - 2a_{02})\sin 2\alpha \end{pmatrix} r^2\varepsilon +$$
$$+ \begin{pmatrix} a_{20} + a_{02} \\ 0 \end{pmatrix} r^2\varepsilon + \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (-9a_{01} + 2a_{10})\cos\alpha - (2a_{01} + 9a_{10})\sin\alpha \\ (2a_{01} - 7a_{10})\cos\alpha + (7a_{01} + 2a_{10})\sin\alpha \end{pmatrix} r\mu\varepsilon +$$

$$+\frac{1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\left(4a_{10}^2-8a_{10}a_{01}\right)\cos\alpha-\left(3a_{10}^2+4a_{10}a_{01}-5a_{01}^2\right)\sin\alpha\\ \left(-5a_{10}^2+4a_{10}a_{01}+3a_{01}^2\right)\cos\alpha+\left(8a_{10}a_{01}-4a_{01}^2\right)\sin\alpha\end{pmatrix}r\varepsilon^2,$$

где $\alpha\equiv\alpha(\tau,\Theta)=\tau+\Theta$.

С учетом обратной замены $y(\tau)|_{\tau=t(1+\mu)}=y(\tau(1+\mu))\overset{\mathrm{def}}{=}x(t)$ получаем

$$\begin{aligned}x(t,\varepsilon,\Theta)={}&\sqrt{2}\begin{pmatrix}\sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix}r+\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(a_{01}+2a_{10})\cos\beta-(2a_{01}-a_{10})\sin\beta\\ -(2a_{01}+a_{10})\cos\beta-(-a_{01}+2a_{10})\sin\beta\end{pmatrix}r\varepsilon+\\ &+\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\beta\\ -\sin\beta\end{pmatrix}r\mu+\frac{1}{16\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/3\cdot\sin3\beta\\ \cos3\beta\end{pmatrix}r^3+\sqrt{2}\begin{pmatrix}-\sin\beta\\ -\cos\beta\end{pmatrix}r\mu^2+\\ &+\frac{1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\cos\beta+\sin\beta\\ -\cos\beta-2\sin\beta\end{pmatrix}r^3+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(a_{20}-a_{02})\cos2\beta-a_{11}\sin2\beta\\ -2a_{11}\cos2\beta-(2a_{20}-2a_{02})\sin2\beta\end{pmatrix}r^2\varepsilon+\\ &+\begin{pmatrix}a_{20}+a_{02}\\ 0\end{pmatrix}r^2\varepsilon+\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(-9a_{01}+2a_{10})\cos\beta-(2a_{01}+9a_{10})\sin\beta\\ (2a_{01}-7a_{10})\cos\beta+(7a_{01}+2a_{10})\sin\beta\end{pmatrix}r\mu\varepsilon+\\ &+\frac{1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\left(4a_{10}^2-8a_{10}a_{01}\right)\cos\beta-\left(3a_{10}^2+4a_{10}a_{01}-5a_{01}^2\right)\sin\beta\\ \left(-5a_{10}^2+4a_{10}a_{01}+3a_{01}^2\right)\cos\beta+\left(8a_{10}a_{01}-4a_{01}^2\right)\sin\beta\end{pmatrix}r\varepsilon^2,\end{aligned}\tag{16}$$

где $\beta\equiv\beta(t,\mu,\Theta)=(1+\mu)t+\Theta$.

С учетом 1-го уравнения системы (2) и $x_1=z$, запишем полученные приближенные решения уравнения (1):

$$\begin{aligned}z(t,\varepsilon,\Theta)={}&\sqrt{2}\sin(\beta)\cdot r+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(a_{01}+2a_{10})\cos\beta-(2a_{01}-a_{10})\sin\beta\right]r\varepsilon+\\ &+\sqrt{2}\cos(\beta)\cdot r\mu+\frac{1}{48\sqrt{2}}\sin(3\beta)\cdot r^3-\sqrt{2}\sin(\beta)\cdot r\mu^2+\\ &+\frac{1}{8\sqrt{2}}(2\cos\beta+\sin\beta)r^3+\frac{1}{3}\left[(a_{20}-a_{02})\cos2\beta-a_{11}\sin2\beta\right]r^2\varepsilon+\\ &+(a_{20}+a_{02})r^2\varepsilon+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[(-9a_{01}+2a_{10})\cos\beta-(2a_{01}+9a_{10})\sin\beta\right]r\mu\varepsilon+\\ &+\frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\left(4a_{10}^2-8a_{10}a_{01}\right)\cos\beta-\left(3a_{10}^2+4a_{10}a_{01}-5a_{01}^2\right)\sin\beta\right]r\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Учитывая, что уравнение (1) автономное, $z(t,\varepsilon,\Theta)$ в (16) – приближенное решение этого уравнения, то приближенным решением уравнения (1) также будет

$$z(t+C,\varepsilon,\Theta),\ \text{где}\ C\in\boldsymbol{R},\ \beta\equiv\beta(t+C,\mu,\Theta)=(1+\mu)(t+C)+\Theta.\tag{17}$$

Таким образом, мы получили двухпараметрическое семейство приближенных решений уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Кочуров В. В. Модельный пример бифуркации Андронова-Хопфа // Механика и процессы управления: сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – С. 37–40.
3. Треногин В. А. Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988. – С. 134–140.