ГАЛКИН Д. В., ГОРБЕНКО О. Ю., ЛЕЩАНКИНА Т. М., ПОЗДЯЕВА Н. С., СИДОРЕНКОВА Т.О., ХАЛИКОВА К. К.

О ПРИМЕНЕНИИ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НА ОРТОГОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРИРОВАННОЙ СЕТКЕ

Аннотация. В работе рассмотрена методика решения двумерного уравнения переноса на структурированной ортогональной сетке методом Галёркина с разрывными базисными функциями. Показано, что разработанная методика обладает порядком сходимости выше первого.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина, структурированная сетка, РМГ, RKDG.

GALKIN D. V., GORBENKO O. YU., LESCHANKINA T. M., POZDYAEVA N. S., SIDORENKOVA T. O., KHALIKOVA K. K.

APPLYING DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL ADVECTION EQUATION ON ORTHOGONAL STRUCTURED GRIDS

Abstract. The paper considers RKDG method for solving the advection equation in two-dimensional space using the structured orthogonal grids. The authors demonstrate that the developed method has the convergence order higher than the first.

Keywords: discontinuous Galerkin method, structured grid, DG, RKDG.

Традиционно конечно элементные методы на основе метода Галёркина для решения гиперболических и параболических уравнений строятся на неструктурированных сетках [1; 2]. Но немаловажный интерес представляет использование структурированной ортогональной сетки, в частности, при решении задач на локально-адаптируемых сетках.

Рассмотрим двумерное уравнение переноса:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad (1)$$

в области $\Omega = [0;1] \times [0;1]$ с соответствующими начальными и периодическими граничными условиями.

Введем в области Ω структурированную прямоугольную сетку T_h, и в каждой ячейке T_i зададим базис $\{\varphi_k\}_{k=0}^{p}$ из пространства полиномов степени не выше K. Приближенное решение системы (1) в ячейке T_i будем искать в виде [1]:

$$U_h(x,t) = \sum_{k=0}^{p} u_k(t)\varphi_k(x). \qquad (2)$$

Коэффициенты $u_k(t)$ в (2) найдем из условия ортогональности всем базисным функциям невязки, получаемой после подстановки (2) в (1):

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t}\varphi_k dxdy + \iint_{T_i} \mathrm{div}U_h\varphi_k\, dxdy = 0, k = 0, \dots, p. \quad (3)$$

Далее получим

$$\iint\limits_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t}\varphi_k dxdy = \iint\limits_{T_i} \left(U_h \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + U_h \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) dxdy - \oint\limits_{\partial T_i} (\widehat{U}_h \varphi_k n_x + \widehat{U}_h \varphi_k n_y) dl$$

$$k = 0, \dots, p.$$

Обозначив за M матрицу масс, составленную из значений скалярных произведений базисных функций, за $L(U_h)$ – правую часть, получим систему:

$$M \frac{\partial U_h}{\partial t} = L(U_h), \quad (4)$$

Выпишем расчетные формулы для ячейки T_i. Пусть $K = 1$, рассмотрим следующий базис:

$$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = (x - x_c), \varphi_2 = (y - y_c), \quad (5)$$

где (x_c, y_c) – координаты центра ячейки.

Тогда приближенное решение принимает вид:

$$U_h = u_0 + u_1(x - x_c) + u_2(y - y_c) \quad (6)$$

Подставляя (6) в формулы (3) - (4), получим следующие системы уравнений:

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \cdot 1 dxdy + \iint_{T_i} \mathrm{div}U_h \cdot 1\, dxdy = 0 \quad (7.1)$$

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \cdot (x - x_c) dxdy + \iint_{T_i} \mathrm{div}U_h \cdot (x - x_c)\, dxdy = 0 \quad (7.2)$$

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \cdot (y - y_c) dxdy + \iint_{T_i} \mathrm{div}U_h \cdot (y - y_c)\, dxdy = 0 \quad (7.3)$$

Далее получим

$$\frac{du_0}{dt}\iint\limits_{Ti} dxdy + \frac{du_1}{dt}\iint\limits_{Ti}(x-x_c)\cdot 1\,dxdy + \frac{du_2}{dt}\iint\limits_{Ti}(y-y_c)\cdot 1\,dxdy$$

$$+ \oint\limits_{\partial Ti}(\,\widehat{U}_h\cdot 1\cdot n_x + \,\widehat{U}_h\cdot 1\cdot n_y)dl \,= 0$$

$$\frac{du_0}{dt}\iint\limits_{Ti}(x-x_c)dxdy + \frac{du_1}{dt}\iint\limits_{Ti}(x-x_c)^2\,dxdy + \frac{du_2}{dt}\iint\limits_{Ti}(x-x_c)(y-y_c)dxdy$$

$$+ \oint\limits_{\partial Ti}(\,\widehat{U}_h(x-x_c)n_x + \,\widehat{U}_h(x-x_c)n_y)dl \;-\; \iint\limits_{T_i} U_h\frac{\partial(x-x_c)}{\partial x}dxdy = 0$$

$$\frac{du_0}{dt}\iint\limits_{Ti}(y-y_c)dxdy + \frac{du_1}{dt}\iint\limits_{Ti}(x-x_c)(y-y_c)\,dxdy + \frac{du_2}{dt}\iint\limits_{Ti}(y-y_c)^2dxdy$$

$$+ \oint\limits_{\partial Ti}(\,\widehat{U}_h(y-y_c)n_x + \,\widehat{U}_h(y-y_c)n_y)dl \;-\; \iint\limits_{T_i} U_h\frac{\partial(y-y_c)}{\partial y}dxdy = 0$$

Тогда система (4) принимает вид:

$$M\frac{dU_h}{dt} = -\begin{pmatrix} \oint_{\partial Ti}(\,\widehat{U}_h\cdot 1\cdot n_x + \,\widehat{U}_h\cdot 1\cdot n_y)dl \\ \oint_{\partial Ti}(\,\widehat{U}_h(x-x_c)n_x + \,\widehat{U}_h(x-x_c)n_y)dl \;-\; \iint_{T_i} U_h\frac{\partial(x-x_c)}{\partial x}dxdy \\ \oint_{\partial Ti}(\,\widehat{U}_h(y-y_c)n_x + \,\widehat{U}_h(y-y_c)n_y)dl \;-\; \iint_{T_i} U_h\frac{\partial(y-y_c)}{\partial y}dxdy \end{pmatrix}$$

Дискретизация по времени осуществляется методом Эйлера, что приводит к явной схеме:

$$M\frac{{U_h}^{new}-U_h}{\Delta t} = -\begin{pmatrix} \oint_{\partial Ti}(\,\widehat{U}_h\cdot 1\cdot n_x + \,\widehat{U}_h\cdot 1\cdot n_y)dl \\ \oint_{\partial Ti}(\,\widehat{U}_h(x-x_c)n_x + \,\widehat{U}_h(x-x_c)n_y)dl \;-\; \iint_{T_i} U_h\frac{\partial(x-x_c)}{\partial x}dxdy \\ \oint_{\partial Ti}(\,\widehat{U}_h(y-y_c)n_x + \,\widehat{U}_h(y-y_c)n_y)dl \;-\; \iint_{T_i} U_h\frac{\partial(y-y_c)}{\partial y}dxdy \end{pmatrix} \quad (8)$$

Была выполнена серия расчетов для определения порядка сходимости. Решалось уравнение (1) с начальными условиями следующего вида:

$$U(x,y,0) = \begin{cases}\sin(2\pi x)\cdot\sin(2\pi y), (x,y)\in[0;0{,}5]\times[0;0{,}5], \\ 0, \text{иначе.}\end{cases} \quad (9)$$

Решив систему (8) получим значение приближенного решения U_h.Зная точное решение U уравнения (1) найдем следующие нормы погрешности $r = U_h - U$:

$$\|r\|_1 = \iint_T |r| dxdy$$

$$\|r\|_2 = \left(\iint_T |r|^2 dxdy\right)^{1/2}$$

Порядки сходимости исследуемого метода будем определять по правилу Рунге:

$$k_1 = \frac{\ln\left(\frac{\|U_h - U\|}{\|U_{h/2} - U\|}\right)}{\ln 2} \tag{10}$$

$$k_2 = \frac{\ln\left(\frac{\|U_h - U\|}{\|U_{h/2} - U\|}\right)}{\ln 2} \tag{11}$$

Таблица 1

Порядок сходимости

N	$\|r\|_1$	$\|r\|_2$	k_1	k_2
25	0,010233	0,029926	-	-
50	0,002775	0,009574	1,8826694842	1,6442057456
100	0,000762	0,003231	1,8646248686	1,5671410555
200	0,000223	0,001125	1,7727472876	1,5220557492

Представленные результаты показывают, что рассмотренная методика позволяет получать решения с порядком сходимости выше первого на структурированных прямоугольных сетках. Что позволяет сделать вывод о применимости разрывного метода Галеркина для решения задач на блочных структурированных локально-адаптируемых сетках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection // Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics). – 1998. – Vol. 1697. – pp. 151–268.
2. Масягин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. О применении разрывного конечно-элементного метода Галёркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 59–65.