МАМЕДОВА Т. Ф., ПАНЯГИНА И. А., КУДАШКИНА Е. А.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Аннотация. В статье решается задача оптимального управления для математической модели экономического роста долгосрочного прогнозирования. На ее основе строится система дифференциальных уравнений, описывающих траектории сбалансированного роста.

Ключевые слова: экономический рост, оптимизационная задача, сбалансированный рост, человеческий капитал, физический капитал.

MAMEDOVA T. F., PANYAGINA I. A., KUDASHKINA E. A.

THE PROBLEM OF OPTIMALITY IN MATHEMATICAL MODEL OF ECONOMIC GROWTH LONG-TERM FORECASTING

Abstract. The authors solve the problem of optimum control for mathematical model of economic growth of long-term forecasting. Considering the problem solution, the article presents a system of differential equations describing the trajectories of balanced growth.

Keywords: economic growth, optimizing task, balanced growth, human capital, physical capital.

Решение задачи оптимальности в моделях долгосрочного прогнозирования экономического роста обеспечивает равномерное, устойчивое развитие. В результате решения задачи оптимального управления, можно выявить оптимальную траекторию, находясь на которой экономика переходит в устойчивое состояние равновесия.

Устойчивый экономический рост может быть достигнут в рамках неоклассической модели с учетом научно-технического прогресса, технологических изменений и образовательного сектора, поэтому в математической модели необходимо также рассматривать эндогенный фактор изменения человеческого капитала.

Рассмотрим описание такой модели [1-5].

Пусть уравнение динамики объема физического капитала имеет вид:

$$\frac{dK(t)}{dt} = A(t)K(t)^{\beta}(u(t)h(t)N(t))^{1-\beta}\left[u_a(t)h_a(t)^{\gamma}\right] - \mu_k K(t) - c(t)N(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ – функция, описывающая технологический прогресс, $K(t)$ – физический капитал, $N(t)$ – численность рабочей силы, $c(t)$ – удельное потребление, β – доля физического капитала, γ - положительный параметр, μ_k – норма амортизации физического капитала, $u(t)$ – доля времени индивида, посвященного производственной деятельности, $h(t)$

– уровень человеческого капитала, h_a – средний уровень человеческого капитала, u_a – средняя доля времени, затраченного на производство.

Уравнение динамики накопления человеческого капитала имеет вид:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \delta(1-u(t))^p \left[1-u_a(t)\right]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t), \quad (2)$$

где δ – положительный технологический параметр, *p*, *s*, *q*, *r* – неотрицательные параметры.

Функция полезности имеет вид:

$$J = J(c,u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} N(t)U(c(t))dt, \quad (3)$$

где ρ – неотрицательный фактор дисконтирования.

Таким образом, оптимизационная задача состоит в выборе таких управляющих параметров (уровня потребления *c* и доли активного времени, посвященного производственной деятельности *u*), которые бы максимизировали бы функционал (3) на допустимых траекториях {K(t), h(t)}.

Решения оптимизационной задачи необходимы для определения траекторий сбалансированного роста, т. е. траекторий, где темпы роста всех переменных постоянны, а также для сравнения планового и конкурентного вариантов развития экономики.

Решим задачу оптимального управления следующим образом: выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина, осуществим переход к сопряженной системе, выпишем необходимые условия экстремума, после чего запишем общую оптимизационную задачу.

Функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид:

$$\begin{aligned} H = {} & \psi_0 e^{-\rho t} N(t)\frac{c(t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \psi_K (A(t)K(t)^\beta (u(t)h(t)N(t))^{1-\beta}\left[u_a(t)h_a(t)^\gamma\right] - \mu_k K(t) - c(t)N(t) + \\ & \psi_H \left[\delta(1-u(t))^p\left[1-u_a(t)\right]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t)\right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции ψ можно интерпретировать как цены ресурсов.

Сделаем замену переменных:

$$\psi_i = e^{-\rho t} o_i(t).$$

Получаем:

$$\begin{aligned} H = {} & N(t)\frac{c(t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + o_K \left[A(t)K(t)^\beta (u(t)h(t)N(t))^{1-\beta}\left[u_a(t)h_a(t)^\gamma\right] - \mu_k K(t) - c(t)N(t)\right] + \\ & o_H \left[\delta(1-u(t))^p\left[1-u_a(t)\right]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t)\right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Система сопряженных уравнений, определяющих цены ресурсов:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[o_K(t)\right] = o_k(t)\left[\rho + \mu_k - \beta A(t)K(t)^{\beta-1}(u(t)h(t)N(t))^{1-\beta} h_a(t)^{\gamma} u_a(t)^{\gamma}\right], \\
&\frac{d}{dt}\left[o_H(t)\right] = o_H(t)\left[\rho + \mu_H - q\delta(1-u(t))^{\rho}\left[1-u_a(t)\right]^{s} h(t)^{\rho-1} h_a(t)^{r}\right] - \\
&- o_k(t)\left[(1-\beta)A(t)K(t)^{\beta}(u(t)N(t))^{1-\beta} h(t)^{-\beta} h_a(t)^{\gamma} u_a(t)^{\gamma}\right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{du}H(K,h,o_k,o_h,c,u,t) = 0, \\
&\frac{d}{dc}H(K,h,o_k,o_h,c,u,t) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

принимают вид

$$\begin{aligned}
&o_K(t)(1-\beta)A(t)K(t)^{\beta}(h(t)N(t))^{1-\beta}u(t)^{-\beta}h_a(t)^{\gamma}u_a(t)^{\gamma} = \\
&= o_h(t)\rho\delta(1-u(t))^{\rho-1}\left[1-u_a(t)\right]^{s} h(t)^{q} h_a(t)^{r}, \\
&c^{-\sigma} = o_K
\end{aligned} \tag{8}$$

Так как было сделано предположение о том, что экономическая система должна находиться в состоянии равновесия, то для нахождения решения необходимо учесть равенства:

$$\begin{aligned}
&h(t) = h_a(t), \\
&u(t) = u_a(t).
\end{aligned} \tag{9}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[o_K(t)\right] = o_K(t)\left[\rho + \mu_K - \beta A(t)K(t)^{\beta-1}(N(t))^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma}\right], \\
&\frac{d}{dt}\left[o_h(t)\right] = o_h(t)(\rho + \mu_K - q\delta(1-u(t))) - o_k(t)\left[(1-\beta)A(t)K(t)^{\beta}(N(t))^{1-\beta} h(t)^{-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma}\right], \\
&c^{-\sigma} = K, \\
&o_K(t)(1-\beta)A(t)K(t)^{\beta}(N(t))^{1-\beta}u(t)^{-\beta+\gamma}h(t)^{1-\beta+\gamma} = o_H(t)\rho\delta h(t).
\end{aligned} \tag{10}$$

Система (1) – (2) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}K(t) = A(t)K(t)^{\beta}N(t)^{1-\beta}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma} - \mu_K K(t) - c(t)N(t), \\
&\frac{d}{dt}h(t) = \delta(1-u(t))h(t) - \mu_h h(t).
\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, для определения оптимальной равновесной траектории экономический агент должен использовать уравнения движения (11), уравнения для сопряженных переменных (6), необходимые условия экстремума (8).

Будем рассматривать траектории сбалансированного роста – такие траектории {k(t),h(t),c(t)}, для которых темпы роста переменных k, h, c являются постоянными.

Из (10) имеем:

$$-\sigma w_c = w_{(o_K)}. \tag{12}$$

Из (12) и (6) имеем:

$$w_c = \frac{-w_{(o_K)}}{\sigma} = \frac{-o_K}{\sigma o_K} = \frac{\left[\rho + \mu_K - \beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} (u(t)h(t))^{1-\beta+\gamma}\right]}{\sigma} \tag{13}$$

Получим дифференциальное уравнение для потребления:

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{c(t)\left[\beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} (u(t)h(t))^{1-\beta+\gamma} - (\rho + \mu_K)\right]}{\sigma}. \tag{14}$$

Из (13) также можно рассмотреть сбалансированную оптимальную траекторию, на которой темпы роста постоянны:

$$A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} (u(t)h(t))^{1-\beta+\gamma} = \frac{\sigma w_c + (\rho + \mu_K)}{\beta} = const. \tag{15}$$

Получаем систему дифференциальных уравнений для определения оптимальных траекторий:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}K(t) = A(t)K(t)^{\beta} N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma} - \mu_K K(t) - c(t)N(t),\\
&\frac{d}{dt}h(t) = \delta(1-u(t))h(t) - \mu_h h(t),\\
&\frac{d}{dt}c(t) = \frac{c(t)\left[\beta A(t)K(t)^{\beta=1} N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} - (\rho + \mu_K\right]}{\sigma}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Полученная система дифференциальных уравнений позволяет установить существование траекторий сбалансированного роста, а также изучить вопрос их устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корицкий А. В. Введение в теорию человеческого капитала. – Новосибирск: СибУПК, 2000. – 112 с.
2. Королев А. В. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста. – Новосибирск: Автоматика и телемеханика, 2006. – 120 с.
3. Шараев Ю. В. Теория экономического роста. – М.: ГУ ВШЭ, 2006. – 254 с.
4. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К. Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15., № 2. – С. 55-58.
5. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 48-57.