**КЯШКИН А. А., ШАМАНАЕВ П. А.**

# НАХОЖДЕНИЕ МЕТОДОМ ДИАГРАММЫ НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РАЗВЕТВЛЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНОГО АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

**Аннотация.** В статье методом диаграммы Ньютона получено разложение в ряд уравнения по обобщенным степеням $\lambda$ для решения уравнения разветвления. Приведен пример нахождения приближенных решений уравнения разветвления, полученного при решении краевой задачи для консервативного автономного уравнения Дуффинга.

**Ключевые слова:** метод диаграммы Ньютона, уравнение разветвления, приближенное решение, краевая задача, уравнение Дуффинга.

**KYASHKIN A. A., SHAMANAEV P. A.**

# APPLICATION OF NEWTON DIAGRAM METHOD FOR BRANCHING EQUATION SOLUTION OBTAINED BY SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR CONSERVATIVE AUTONOMOUS DUFFING EQUATION

**Abstract.** The authors apply the Newton diagram method to obtain a series expansion of the equation in generalized powers of $\lambda$ for the solution of the branching. The article includes an example of finding approximate solutions for the branching equation obtained by solving the boundary value problem for the conservative autonomous Duffing equation.

**Keywords:** Newton diagram method, branching equation, approximate solution, boundary value problem, Duffing equation.

В статье [4] исследовалась задача о нахождении приближенных решений дифференциального уравнения 2-го порядка (консервативное автономное уравнение Дуффинга) [1, с.19]

$$y'' + y = -\varepsilon y + y^3, \tag{1}$$

$$y(-\pi) = y(\pi) \tag{2}$$

в окрестности точки $x = 0$, $\varepsilon = 0$ с помощью нахождения решения в виде ряда до 4-го порядка коэффициентов и построения уравнения разветвления.

Для полученного уравнения разветвления

$$\begin{cases} -\xi_1\varepsilon^3 + \xi_1\varepsilon^2 - \dfrac{3}{\pi}\xi_1\xi_2^2\varepsilon - \dfrac{3}{\pi}\xi_1^3\varepsilon - \xi_1\varepsilon + \dfrac{3}{4\pi}\xi_1\xi_2^2 + \dfrac{3}{4\pi}\xi_1^3 = 0, \\ -\xi_2\varepsilon^3 + \xi_2\varepsilon^2 - \dfrac{3}{\pi}\xi_2^3\varepsilon - \dfrac{3}{\pi}\xi_1^2\xi_2\varepsilon - \xi_2\varepsilon + \dfrac{3}{4\pi}\xi_2^3 + \dfrac{3}{4\pi}\xi_1^2\xi_2 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

были найдены следующие семейства решений:

$$
1-2)\quad \begin{cases}\xi_1 = C,\\ \xi_2 = \pm\dfrac{\sqrt{-4\pi\varepsilon^3+4\pi\varepsilon^2+\left(-12C^2-4\pi\right)\varepsilon+3C^2}}{\sqrt{3}\sqrt{4\varepsilon-1}},\end{cases}\qquad 3)\quad \begin{cases}\xi_1 = 0,\\ \xi_2 = 0,\end{cases}\qquad 4-5)\quad \begin{cases}\xi_1 = \mp\dfrac{2\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{-\varepsilon^2+\varepsilon-1}}{\sqrt{3}\sqrt{4\varepsilon-1}},\\ \xi_2 = 0,\end{cases} \tag{4}
$$

где $C \in \Re$ – некоторое фиксированное число.

Рассмотрим 1-2 семейства решений в (4) и найдем зависимость $C(\varepsilon)$, тем самым получив решение уравнения разветвления (3) в виде:

$$
\xi(\varepsilon) = \{\xi_1(\varepsilon), \xi_2(\varepsilon)\}. \tag{5}
$$

Зафиксировав условия (2) следующим образом

$$
y(-\pi) = y(\pi) = \frac{1}{2}, \tag{6}
$$

получаем первую краевую задачу для уравнения Дуффинга с параметром $\varepsilon$: (1),(6), где $-\pi < x < \pi$, $\varepsilon \in \Re$.

Из полученных в [4] решений $y_{1,2}(x,\varepsilon,C)$, $y_3$, $y_{4,5}(x,\varepsilon)$ задачи (1), удовлетворяющих условию (2), рассмотрим следующие решения:

$$
\begin{aligned}
y_1(x,\varepsilon,C) &= \sum_{i=1}^{4}(-1)^i a_i \sin(3x) + \sum_{j=1}^{12}(-1)^j a_{j+4}\cos(3x) + \sum_{k=1}^{8}(-1)^k a_{k+16}\sin(x) + \sum_{l=1}^{13}(-1)^{l+1}a_{l+24}\cos(x),\\
y_2(x,\varepsilon,C) &= \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1} a_i \sin(3x) + \sum_{j=1}^{12}(-1)^j a_{j+4}\cos(3x) + \sum_{k=1}^{8}(-1)^{k+1} a_{k+16}\sin(x) + \sum_{l=1}^{13}(-1)^{l+1}a_{l+24}\cos(x),
\end{aligned} \tag{7}
$$

где

$$
a_1 = \frac{23\varepsilon p^3}{256\cdot 3^{3/2}\pi^{3/2}q^3},\ a_2 = \frac{p^3}{32\cdot 3^{3/2}\pi^{3/2}q^3},\ a_3 = \frac{\sqrt{3}C^2 p}{32\pi^{3/2}q},\ a_4 = \frac{23\sqrt{3}C^2\varepsilon p}{256\pi^{3/2}q}, a_5 = \frac{69C^3\varepsilon}{256\pi^{3/2}q^2},
$$

$$
a_6 = \frac{69C^3\varepsilon^2}{64\pi^{3/2}q^2},\ a_7 = \frac{3C^3\varepsilon}{8\pi^{3/2}q^2},\ a_8 = \frac{3C^3}{32\pi^{3/2}q^2},\ a_9 = \frac{23C\varepsilon^3}{64\sqrt{\pi}q^2},\ a_{10} = \frac{23C\varepsilon^4}{64\sqrt{\pi}q^2},\ a_{11} = \frac{C\varepsilon^3}{8\sqrt{\pi}q^2},
$$

$$
a_{12} = \frac{23C\varepsilon^2}{64\sqrt{\pi}q^2},\ a_{13} = \frac{C\varepsilon}{8\sqrt{\pi}q^2},\ a_{14} = \frac{C\varepsilon^2}{8\sqrt{\pi}q^2},\ a_{15} = \frac{C^3}{32\pi^{3/2}},\ a_{16} = \frac{23C^3\varepsilon}{256\pi^{3/2}}, a_{17} = \frac{\varepsilon p^3}{\sqrt{3}\pi^{3/2}q^3},
$$

$$
a_{18} = \frac{p^3}{4\sqrt{3}\pi^{3/2}q^3}, a_{19} = \frac{\varepsilon^3 p}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}q},\ a_{20} = \frac{\varepsilon^2 p}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}q},\ a_{21} = \frac{\sqrt{3}C^2\varepsilon p}{\pi^{3/2}q},\ a_{22} = \frac{\sqrt{3}C^2 p}{4\pi^{3/2}q},\ a_{23} = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}q},
$$

$$
a_{24} = \frac{p}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}q},\ a_{25} = \frac{3C^3}{4\pi^{3/2}q^2},\ a_{26} = \frac{6C^3\varepsilon}{\pi^{3/2}q^2},\ a_{27} = \frac{12C^3\varepsilon^2}{\pi^{3/2}q^2},\ a_{28} = \frac{5C\varepsilon^3}{\sqrt{\pi}q^2},\ a_{29} = \frac{4C\varepsilon^4}{\sqrt{\pi}q^2},
$$

$$
a_{30} = \frac{C\varepsilon}{\sqrt{\pi}q^2},\ a_{31} = \frac{5C\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}q^2},\ a_{32} = \frac{C\varepsilon^3}{\sqrt{\pi}},\ a_{33} = \frac{C\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}}, a_{34} = \frac{3C^3\varepsilon}{\pi^{3/2}},\ a_{35} = \frac{3C^3}{4\pi^{3/2}},\ a_{36} = \frac{C\varepsilon}{\sqrt{\pi}},\ a_{37} = \frac{C}{\sqrt{\pi}},
$$

$$
a_i = a_i(\varepsilon, C),\quad i = \overline{1,37},\ p = p(\varepsilon, C) = \sqrt{-4\pi\varepsilon^3 + 4\pi\varepsilon^2 - 12C^3\varepsilon - 4\pi\varepsilon + 3C^2},
$$

$q = q(\varepsilon) = \sqrt{4\varepsilon - 1}$, $C \in \Re$ – некоторое фиксированное число.

В статье [3] с помощью подстановки каждого из решений $y_1(x,\varepsilon,C)$ и $y_2(x,\varepsilon,C)$ из (7) в (6) было получено уравнение:

$$\frac{23\varepsilon-8}{64\pi^{3/2}}C^3+\frac{23\varepsilon^4-31\varepsilon^3+31\varepsilon^2+248\varepsilon-64}{64\sqrt{\pi}(4\varepsilon-1)}C+\frac{1}{2}=0\,. \tag{8}$$

Данное уравнение (8) при каждом фиксированном $\varepsilon$ будет являться кубическим уравнением относительно *С*. Преобразовав уравнение (8) в каноническую форму и исследовав его, в статье [3] мы получили зависимость числа различных корней $C\in\Re$ от фиксированного $\varepsilon\in\Re$, отраженную в таблице 1.

Таблица 1. Зависимость числа различных корней $C\in\Re$ от параметра $\varepsilon\in\Re$.
Здесь $\varepsilon_1^0\approx-0{,}68177$, $\varepsilon_2^0\approx0{,}25285$.

| $\varepsilon$ | $(-\infty,\varepsilon_1^0)\cup\left(\frac{1}{4},\varepsilon_2^0\right)\cup\left[\frac{8}{23},\infty\right)$ | $\{\varepsilon_1^0,\varepsilon_2^0\}$ | $\left(\varepsilon_1^0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\varepsilon_2^0,\frac{8}{23}\right)$ |
|---|---|---|---|
| Число различных корней $C\in\Re$ | 1 | 2 | 3 |

Произведем замену $C=\xi$, $\varepsilon=\lambda$ и преобразуем левую часть (8), умножив обе части уравнения на $4\lambda-1$. Получим уравнение

$$\frac{23\lambda^2\xi^3}{16\pi^{3/2}}-\frac{55\lambda\xi^3}{64\pi^{3/2}}+\frac{\xi^3}{8\pi^{3/2}}+\frac{23\lambda^4\xi}{64\sqrt{\pi}}-\frac{31\lambda^3\xi}{64\sqrt{\pi}}+\frac{31\lambda^2\xi}{64\sqrt{\pi}}+\frac{31\lambda\xi}{8\sqrt{\pi}}-\frac{\xi}{\sqrt{\pi}}+2\lambda-\frac{1}{2}=0\,, \tag{9}$$

где $\lambda\neq1/4$. Решение данного уравнения (9) относительно $\xi$ будем искать в виде ряда методом диаграммы Ньютона [2, с. 35].

Рассмотрим промежутки, указанные в таблице 1. На $(-\infty,\varepsilon_1^0)$ и $[8/23,\infty)$ решения уравнения (9) ищутся после ограничения этих промежутков. При $\varepsilon=\varepsilon_1^0$ и $\varepsilon=\varepsilon_2^0$ решения получить невозможно, поскольку $\varepsilon_1^0$ и $\varepsilon_2^0$ известны лишь приближенно.

Далее, ввиду громоздкости получающихся решений ограничимся только двумя промежутками, округленными до $10^{-3}$: $(0{,}25,\,0{,}252]\subset(1/4,\varepsilon_2^0)$ и $[0{,}253,\,0{,}347]\subset(\varepsilon_2^0,8/23)$. Решения будем искать с точностью $\tilde{\varepsilon}=10^{-2}$. Для удобства коэффициенты $\gamma_{k,l}^{(d)}$ получающихся решений приведены в стандартном виде и мантиссы округлены до $10^{-3}$. Вычисленные области сходимости округлены до $10^{-4}$. Решение задачи производится с использованием математического пакета Maxima.

1. $(0{,}25,\,0{,}252]$. Согласно таблице 1, в окрестности любой точки из данного промежутка методом диаграммы Ньютона будет найдено одно решение.

1) Рассмотрим окрестность точки $\lambda=0{,}25$. В этой окрестности получаем 3 решения, однако вычисленная область сходимости с точностью $\tilde{\varepsilon}=10^{-2}$ может быть найдена только для одного решения:

$$\xi_1^{(0,25)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_{1,i-1}^{(0,25)} \lambda^{i-1}, \qquad (10)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,25)} = 6{,}458 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,1}^{(0,25)} = -1{,}552 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,2}^{(0,25)} = 1{,}554 \cdot 10^{15}$, $\gamma_{1,3}^{(0,25)} = -8{,}297 \cdot 10^{15}$, $\gamma_{1,4}^{(0,25)} = 2{,}492 \cdot 10^{16}$, $\gamma_{1,5}^{(0,25)} = -3{,}993 \cdot 10^{16}$, $\gamma_{1,6}^{(0,25)} = 2{,}665 \cdot 10^{16}$.

Тогда вычисленная область сходимости: $[a^{(0,25)}, b^{(0,25)}] = [0{,}2480,\ 0{,}2519]$.

2) Окрестность точки $\lambda = 0{,}252$:

$$\xi_1^{(0,252)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{5} \gamma_{1,i-1}^{(0,252)} \lambda^{i-1}, \qquad (11)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,252)} = -2{,}571 \cdot 10^{8}$, $\gamma_{1,1}^{(0,252)} = 4{,}026 \cdot 10^{9}$, $\gamma_{1,2}^{(0,252)} = -2{,}364 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{1,3}^{(0,252)} = 6{,}169 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{1,4}^{(0,252)} = -6{,}036 \cdot 10^{10}$.

Тогда вычисленная область сходимости: $[a^{(0,252)}, b^{(0,252)}] = [0{,}2508,\ 0{,}2535]$.

Решение задачи в этом случае можно записать так:

$$\xi(\lambda) = \begin{cases} \xi_1^{(0,25)}(\lambda), & \text{åñëè } \lambda \in (0{,}25,\ 0{,}2519], \\ \xi_1^{(0,252)}(\lambda), & \text{åñëè } \lambda \in (0{,}2519,\ 0{,}252]. \end{cases} \qquad (12)$$

где $\xi_1^{(0,25)}(\lambda)$, $\xi_1^{(0,252)}(\lambda)$ имеют вид (10)-(11) соответственно.

2. $[0{,}253,\ 0{,}347]$. Согласно таблице 1, в окрестности любой точки из данного промежутка методом диаграммы Ньютона будет найдено три решения.

1) Окрестность точки $\lambda = 0{,}275$:

$$\xi_1^{(0,275)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{10} \gamma_{1,i-1}^{(0,275)} \lambda^{i-1}, \qquad (13)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,275)} = 1{,}290 \cdot 10^{9}$, $\gamma_{1,1}^{(0,275)} = -4{,}176 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{1,2}^{(0,275)} = 6{,}010 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,3}^{(0,275)} = -5{,}046 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,4}^{(0,275)} = 2{,}724 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,5}^{(0,275)} = -9{,}805 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,6}^{(0,275)} = 2{,}353 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,7}^{(0,275)} = -3{,}631 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,8}^{(0,275)} = 3{,}269 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,9}^{(0,275)} = -1{,}308 \cdot 10^{14}$;

$$\xi_2^{(0,275)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{2,i-1}^{(0,275)} \lambda^{i-1}, \qquad (14)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,275)} = -1{,}156 \cdot 10^{1}$, $\gamma_{2,1}^{(0,275)} = 7{,}403 \cdot 10^{1}$, $\gamma_{2,2}^{(0,275)} = -1{,}289 \cdot 10^{2}$;

$$\xi_3^{(0,275)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{10} \gamma_{3,i-1}^{(0,275)} \lambda^{i-1}, \qquad (15)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,275)} = -9{,}300 \cdot 10^{8}$, $\gamma_{3,1}^{(0,275)} = 3{,}010 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{3,2}^{(0,275)} = -4{,}332 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,3}^{(0,275)} = 3{,}636 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,4}^{(0,275)} = -1{,}963 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,5}^{(0,275)} = 7{,}063 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,6}^{(0,275)} = -1{,}695 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,7}^{(0,275)} = 2{,}615 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,8}^{(0,275)} = -2{,}353 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,9}^{(0,275)} = 9{,}415 \cdot 10^{13}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид: $[a^{(0,275)}, b^{(0,275)}] = [0{,}2529,\ 0{,}2962]$.

2) Окрестность точки $\lambda = 0{,}317$:

$$\xi_1^{(0,317)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{10} \gamma_{1,i-1}^{(0,317)} \lambda^{i-1}, \tag{16}$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,317)} = 3{,}643 \cdot 10^9$, $\gamma_{1,1}^{(0,317)} = -1{,}045 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,2}^{(0,317)} = 1{,}333 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,3}^{(0,317)} = -9{,}913 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,4}^{(0,317)} = 4{,}741 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,5}^{(0,317)} = -1{,}512 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,6}^{(0,317)} = 3{,}215 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,7}^{(0,317)} = -4{,}395 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,8}^{(0,317)} = 3{,}506 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,9}^{(0,317)} = -1{,}243 \cdot 10^{14}$;

$$\xi_2^{(0,317)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{2,i-1}^{(0,317)} \lambda^{i-1}, \tag{17}$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,317)} = -1{,}643 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,1}^{(0,317)} = 4{,}197 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,2}^{(0,317)} = -5{,}825 \cdot 10^0$;

$$\xi_3^{(0,317)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{10} \gamma_{3,i-1}^{(0,317)} \lambda^{i-1}, \tag{18}$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,317)} = -3{,}643 \cdot 10^9$, $\gamma_{3,1}^{(0,317)} = 1{,}045 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,2}^{(0,317)} = -1{,}333 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,3}^{(0,317)} = 9{,}913 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,4}^{(0,317)} = -4{,}741 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,5}^{(0,317)} = 1{,}512 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,6}^{(0,317)} = -3{,}215 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,7}^{(0,317)} = 4{,}395 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,8}^{(0,317)} = -3{,}506 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,9}^{(0,317)} = 1{,}243 \cdot 10^{14}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид: $[a^{(0,317)}, b^{(0,317)}] = [0{,}2957,\ 0{,}3346]$.

3) Окрестность точки $\lambda = 0{,}338$:

$$\xi_1^{(0,338)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_{1,i-1}^{(0,338)} \lambda^{i-1}, \tag{19}$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,338)} = -1{,}081 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{1,1}^{(0,338)} = 1{,}928 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,2}^{(0,338)} = -1{,}433 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,3}^{(0,338)} = 5{,}684 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,4}^{(0,338)} = -1{,}268 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,5}^{(0,338)} = 1{,}508 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,6}^{(0,338)} = -7{,}477 \cdot 10^{12}$;

$$\xi_2^{(0,338)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{2,i-1}^{(0,338)} \lambda^{i-1}, \tag{20}$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,338)} = -1{,}295 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,1}^{(0,338)} = 2{,}060 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,2}^{(0,338)} = -2{,}542 \cdot 10^0$;

$$\xi_3^{(0,338)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_{3,i-1}^{(0,338)} \lambda^{i-1}, \tag{21}$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,338)} = 1{,}081 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{3,1}^{(0,338)} = -1{,}928 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,2}^{(0,338)} = 1{,}433 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,3}^{(0,338)} = -5{,}684 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,4}^{(0,338)} = 1{,}268 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,5}^{(0,338)} = -1{,}508 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,6}^{(0,338)} = 7{,}476 \cdot 10^{12}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид: $[a^{(0,338)}, b^{(0,338)}] = [0{,}3333,\ 0{,}3421]$.

4) Окрестность точки $\lambda = 0{,}343$:

$$\xi_1^{(0,343)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_{1,i-1}^{(0,343)} \lambda^{i-1}, \tag{22}$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,343)} = -1{,}219 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,1}^{(0,343)} = 2{,}137 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,2}^{(0,343)} = -1{,}562 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,3}^{(0,343)} = 6{,}086 \cdot 10^{14}$,

$\gamma_{1,4}^{(0,343)} = -1{,}334 \cdot 10^{15}$ , $\gamma_{1,5}^{(0,343)} = 1{,}560 \cdot 10^{15}$ , $\gamma_{1,6}^{(0,343)} = -7{,}599 \cdot 10^{14}$ ;

$$\xi_2^{(0,343)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{2,i-1}^{(0,343)} \lambda^{i-1} , \qquad (23)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,343)} = -1{,}250 \cdot 10^{0}$ , $\gamma_{2,1}^{(0,343)} = 1{,}794 \cdot 10^{0}$ , $\gamma_{2,2}^{(0,343)} = -2{,}152 \cdot 10^{0}$ ;

$$\xi_3^{(0,343)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_{3,i-1}^{(0,343)} \lambda^{i-1} , \qquad (24)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,343)} = 1{,}219 \cdot 10^{12}$ , $\gamma_{3,1}^{(0,343)} = -2{,}137 \cdot 10^{13}$ , $\gamma_{3,2}^{(0,343)} = 1{,}562 \cdot 10^{14}$ , $\gamma_{3,3}^{(0,343)} = -6{,}086 \cdot 10^{14}$ , $\gamma_{3,4}^{(0,343)} = 1{,}334 \cdot 10^{15}$ , $\gamma_{3,5}^{(0,343)} = -1{,}560 \cdot 10^{15}$ , $\gamma_{3,6}^{(0,343)} = 7{,}599 \cdot 10^{14}$ .

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид: $[a^{(0,343)}, b^{(0,343)}] = [0{,}3409,\ 0{,}3448]$.

5) Окрестность точки $\lambda = 0{,}345$:

$$\xi_1^{(0,345)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{6} \gamma_{1,i-1}^{(0,345)} \lambda^{i-1} , \qquad (25)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,345)} = 3{,}678 \cdot 10^{11}$ , $\gamma_{1,1}^{(0,345)} = -5{,}340 \cdot 10^{12}$ , $\gamma_{1,2}^{(0,345)} = 3{,}101 \cdot 10^{13}$ , $\gamma_{1,3}^{(0,345)} = -9{,}005 \cdot 10^{13}$ , $\gamma_{1,4}^{(0,345)} = 1{,}307 \cdot 10^{14}$ , $\gamma_{1,5}^{(0,345)} = -7{,}593 \cdot 10^{13}$ ;

$$\xi_2^{(0,345)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{2,i-1}^{(0,345)} \lambda^{i-1} , \qquad (26)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,345)} = -1{,}234 \cdot 10^{0}$ , $\gamma_{2,1}^{(0,345)} = 1{,}702 \cdot 10^{0}$ , $\gamma_{2,2}^{(0,345)} = -2{,}019 \cdot 10^{0}$ ;

$$\xi_3^{(0,345)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{6} \gamma_{3,i-1}^{(0,345)} \lambda^{i-1} , \qquad (27)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,345)} = -3{,}678 \cdot 10^{11}$ , $\gamma_{3,1}^{(0,345)} = 5{,}339 \cdot 10^{12}$ , $\gamma_{3,2}^{(0,345)} = -3{,}101 \cdot 10^{13}$ , $\gamma_{3,3}^{(0,345)} = 9{,}004 \cdot 10^{13}$ , $\gamma_{3,4}^{(0,345)} = -1{,}307 \cdot 10^{14}$ , $\gamma_{3,5}^{(0,345)} = 7{,}593 \cdot 10^{13}$ .

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид: $[a^{(0,345)}, b^{(0,345)}] = [0{,}3440,\ 0{,}3459]$.

6) Окрестность точки $\lambda = 0{,}3457$ :

$$\xi_1^{(0,3457)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{6} \gamma_{1,i-1}^{(0,3457)} \lambda^{i-1} , \qquad (28)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,3457)} = 1{,}781 \cdot 10^{12}$ , $\gamma_{1,1}^{(0,3457)} = -2{,}580 \cdot 10^{13}$ , $\gamma_{1,2}^{(0,3457)} = 1{,}495 \cdot 10^{14}$ , $\gamma_{1,3}^{(0,3457)} = -4{,}330 \cdot 10^{14}$ , $\gamma_{1,4}^{(0,3457)} = 6{,}270 \cdot 10^{14}$ , $\gamma_{1,5}^{(0,3457)} = -3{,}633 \cdot 10^{14}$ ;

$$\xi_2^{(0,3457)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{2,i-1}^{(0,3457)} \lambda^{i-1} , \qquad (29)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,3457)} = -1{,}229 \cdot 10^{0}$ , $\gamma_{2,1}^{(0,3457)} = 1{,}672 \cdot 10^{0}$ , $\gamma_{2,2}^{(0,3457)} = -1{,}975 \cdot 10^{0}$ ;

$$\xi_3^{(0,3457)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{6} \gamma_{3,i-1}^{(0,3457)} \lambda^{i-1}, \qquad (30)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,3457)} = -1{,}781 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,1}^{(0,3457)} = 2{,}580 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,2}^{(0,3457)} = -1{,}495 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,3}^{(0,3457)} = 4{,}329 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,4}^{(0,3457)} = -6{,}270 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,5}^{(0,3457)} = 3{,}633 \cdot 10^{14}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид: $[a^{(0,3457)}, b^{(0,3457)}] = [0{,}3450,\ 0{,}3463]$.

7) Окрестность точки $\lambda = 0{,}3463$:

$$\xi_1^{(0,3463)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{5} \gamma_{1,i-1}^{(0,3463)} \lambda^{i-1}, \qquad (31)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,3463)} = -5{,}460 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{1,1}^{(0,3463)} = 6{,}315 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,2}^{(0,3463)} = -2{,}739 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,3}^{(0,3463)} = 5{,}279 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,4}^{(0,3463)} = -3{,}816 \cdot 10^{12}$;

$$\xi_2^{(0,3463)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{2,i-1}^{(0,3463)} \lambda^{i-1}, \qquad (32)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,3463)} = -1{,}225 \cdot 10^{0}$, $\gamma_{2,1}^{(0,3463)} = 1{,}647 \cdot 10^{0}$, $\gamma_{2,2}^{(0,3463)} = -1{,}938 \cdot 10^{0}$;

$$\xi_3^{(0,3463)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{5} \gamma_{3,i-1}^{(0,3463)} \lambda^{i-1}, \qquad (33)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,3463)} = 5{,}460 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{3,1}^{(0,3463)} = -6{,}315 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,2}^{(0,3463)} = 2{,}739 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,3}^{(0,3463)} = -5{,}279 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,4}^{(0,3463)} = 3{,}816 \cdot 10^{12}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид: $[a^{(0,3463)}, b^{(0,3463)}] = [0{,}3459,\ 0{,}3466]$.

8) Окрестность точки $\lambda = 0{,}3468$:

$$\xi_1^{(0,3468)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{5} \gamma_{1,i-1}^{(0,3468)} \lambda^{i-1}, \qquad (34)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,3468)} = -3{,}282 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,1}^{(0,3468)} = 3{,}789 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,2}^{(0,3468)} = -1{,}640 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,3}^{(0,3468)} = 3{,}156 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,4}^{(0,3468)} = -2{,}277 \cdot 10^{13}$;

$$\xi_2^{(0,3468)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{2,i-1}^{(0,3468)} \lambda^{i-1}, \qquad (35)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,3468)} = -1{,}221 \cdot 10^{0}$, $\gamma_{2,1}^{(0,3468)} = 1{,}626 \cdot 10^{0}$, $\gamma_{2,2}^{(0,3468)} = -1{,}908 \cdot 10^{0}$;

$$\xi_3^{(0,3468)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{5} \gamma_{3,i-1}^{(0,3468)} \lambda^{i-1}, \qquad (36)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,3468)} = 3{,}282 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,1}^{(0,3468)} = -3{,}789 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,2}^{(0,3468)} = 1{,}640 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,3}^{(0,3468)} = -3{,}156 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,4}^{(0,3468)} = 2{,}277 \cdot 10^{13}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид: $[a^{(0,3468)}, b^{(0,3468)}] = [0{,}3466,\ 0{,}3470]$.

Решение задачи в этом случае запишется так:

$$\xi(\lambda)=\begin{cases}\xi_i^{(0,275)}(\lambda), & \text{åñëè} \quad \lambda\in[0{,}253,\ 0{,}2962],\\ \xi_i^{(0,317)}(\lambda), & \text{åñëè} \quad \lambda\in(0{,}2962,\ 0{,}3346],\\ \xi_i^{(0,338)}(\lambda), & \text{åñëè} \quad \lambda\in(0{,}3346,\ 0{,}3421],\\ \xi_i^{(0,343)}(\lambda), & \text{åñëè} \quad \lambda\in(0{,}3421,\ 0{,}3448],\\ \xi_i^{(0,345)}(\lambda), & \text{åñëè} \quad \lambda\in(0{,}3448,\ 0{,}3459],\\ \xi_i^{(0,3457)}(\lambda), & \text{åñëè} \quad \lambda\in(0{,}3459,\ 0{,}3463],\\ \xi_i^{(0,3463)}(\lambda), & \text{åñëè} \quad \lambda\in(0{,}3463,\ 0{,}3466],\\ \xi_i^{(0,3468)}(\lambda), & \text{åñëè} \quad \lambda\in(0{,}3466,\ 0{,}347].\end{cases} \tag{37}$$

где $\xi_i^{(0,275)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,317)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,338)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,343)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,345)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,3457)}(\lambda)$, $i=\overline{1,3}$, имеют вид (13)-(36) соответственно.

Производя в (12) и (37) обратную замену $\xi = C$, $\lambda = \varepsilon$, и подставляя их в 1-2 семейства решений в (4), получаем решение уравнения разветвления (3) в виде (5).

ЛИТЕРАТУРА


1. Астахов В. В., Коблянский С. А., Шабунин А. В. Осциллятор Дуффинга: Учебное пособие для студентов вузов. – Саратов: СГУ, 2007. – 53 с.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
3. Кяшкин А. А, Шаманаев П. А. Исследование приближенных решений первой краевой задачи для консервативного автономного уравнения Дуффинга // Актуальные вопросы прикладной математики и информатики: сб. науч. тр. – Саранск: СВМО. – 2013. – Т. 2, № 2. – С.20-28.
4. Кяшкин А. А, Шаманаев П. А. Нахождение малых решений дифференциального уравнения 2-го порядка с помощью построения уравнения разветвления // Актуальные вопросы прикладной математики и информатики: сб. науч. тр. – Саранск: СВМО. – 2013. – Т. 2, № 1. – С.19-23.