

САЛЬНИКОВ В. Д.
РАЗРАБОТКА НЕЯВНОЙ СХЕМЫ
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Аннотация. В статье описана неявная противопоточная конечно объемная схема в дельта-форме для моделирования течений идеального сжимаемого газа. В код программы для моделирования задач гидродинамики cfd-2d, разрабатываемой на кафедре прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, добавлена возможность расчета течения газа неявным конечно объемным методом. Приведен анализ решения типовых задач.

Ключевые слова: газовая динамика, численное моделирование, уравнение Эйлера.

SALNIKOV V. D.
CREATING IMPLICIT SCHEME
FOR COMPRESSIBLE GAS FLOWS SIMULATION

Abstract. The article describes the implicit finite volume upwind scheme in delta-form for calculation of an ideal compressible gas flows. The ability to calculate an implicit finite volume upwind scheme in delta-form for calculation of an ideal compressible gas flows was added to the program for simulation of hydrodynamics cfd-2d, developed by the Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics. The article includes an analysis of typical problems.

Keywords: gas dynamics, numerical simulation, Euler equation.

Задачи газовой динамики постоянно возникают в самых разных областях науки и техники, что обуславливает потребность исследований в области механики газа. Наряду с теоретическим и экспериментальным подходами, в настоящее время, с учетом постоянного роста производительности компьютеров, вычислительная газодинамика становится все более эффективным инструментом исследований. Уравнения газодинамики нелинейны и многомерны – эти обстоятельства также говорят в пользу вычислительного подхода, поскольку теоретические исследования очень сложны. Вычислительная газовая динамика дает возможность проведения экспериментов, когда невозможно провести прямые измерения, и позволяет экономить средства, когда такие измерения слишком дороги. Интенсивное развитие и применение к расчету невязких сжимаемых течений идеального газа получили неявные разностные схемы, которые в отличие от явных схем снимают жесткие ограничения на шаг интегрирования по времени. В код программы для моделирования задач

гидродинамики cfd-2d [6] добавлена возможность расчета течения газа неявным конечно объемным методом. Приведен анализ решения типовых задач.

Основные уравнения. В основе математической модели теории движения газа и жидкости лежат законы сохранения массы, импульса и энергии. В декартовой системе координат (x, y) (в этой работе рассматривается только двумерные течения, при необходимости все рассуждения можно обобщить на трехмерный случай) течение сжимаемого идеального невязкого газа описывает уравнение Эйлера [3]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

уравнение состояния представлено в форме:

$$p = \varepsilon \rho (\gamma - 1), \quad (1.2)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, F_x(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, F_y(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Здесь t – время; ρ – плотность; p – давление; (u, v) – составляющие скорости в координатных направлениях (x, y) ; ε – внутренняя энергия единицы массы; $E = \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}$ – полная энергия единицы массы; $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – показатель адиабаты; C_p – теплоемкость при постоянном давлении; C_v – теплоемкость при постоянном объеме.

Численный метод. В основу численного алгоритма положен метод конечных объемов. Рассматриваемый метод относится к семейству методов Годуновского типа и является консервативным. Методы Годуновского типа основаны на решении задачи Римана о распаде разрыва. Достаточно часто в области сложной геометрии не удается приемлемо построить не только структурированную сетку, но и многоблочную. Преимущество неструктурированных сеток перед регулярными заключается в большей гибкости при дискретизации физической области сложной формы [1]. В данной работе выбрана неструктурная треугольная сетка, удовлетворяющая принципу триангуляции Делоне. В таких сетках треугольники построены так, что в круг, описанный около любого треугольника, не попадает ни одного узла, отличного от вершин указанного треугольника [2, 7]. Треугольные ячейки сетки, построенной таким образом, выступают в роли непересекающихся контрольных объемов.

Система (1.1) записывается в виде интегральных законов сохранения по контрольному объему Δ_i с границей $\partial\Delta_i$, ориентация которой задается внешней единичной нормалью \vec{n} :

$$\iint_{\Delta_i} \frac{\partial U}{\partial t} dS + \iint_{\partial\Delta_i} \text{div } \vec{F} dS = 0. \quad (2.1)$$

Затем, применив формулу Остроградского-Гаусса, связывающую интеграл по объему с поверхностным интегралом, получим:

$$\iint_{\Delta_i} \frac{\partial U}{\partial t} dS + \oint_{\partial\Delta_i} \vec{F} dl = 0, \quad (2.2)$$

отсюда,

$$S_i \frac{\partial U_i}{\partial t} = - \oint_{\partial\Delta_i} \vec{F} \cdot \vec{n} dl. \quad (2.3)$$

Запишем (2.3) в полудискретном виде:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau_i} = - \frac{1}{S_i} \oint_{\partial\Delta_i} \vec{F} \cdot \vec{n} dl. \quad (2.4)$$

Обозначим через $F_{ij}^{n+1} = (F_{x_{ij}}^{n+1}, F_{y_{ij}}^{n+1})$ поток через грань с номером j , контрольного объема Δ_i на временном слое $(n+1)$; τ_i – шаг по времени в Δ_i контрольном объеме; S_i – площадь i -ого контрольного объема.

Контурный интеграл из соотношения (2.4) может быть аппроксимирован:

$$R_i^{n+1} = \sum_{j=1}^3 l_{ij} [F_{x_{ij}}^{n+1} \cdot n_{x_{ij}} + F_{y_{ij}}^{n+1} \cdot n_{y_{ij}}], \quad (2.5)$$

где l_{ij} – длина j -ой грани треугольника Δ_i ; $n_{ij} = (n_{x_{ij}}, n_{y_{ij}})$ – единичная нормаль к j -ой грани i -ой ячейки.

Потоки через грань контрольного объема вычисляются на основе приближенного решения задачи Римана [3] методом Лакса-Фридрихса [5].

Таким образом, из (2.4) и (2.5) получаем:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau_i} S_i = - \sum_{j=1}^3 l_{ij} [F_{x_{ij}}^{n+1} \cdot n_{x_{ij}} + F_{y_{ij}}^{n+1} \cdot n_{y_{ij}}]. \quad (2.6)$$

Рассмотрим разложение потоковой функции в ряд Тейлора:

$$F_{x_{ij}}^{n+1} = F_x(U_{ij}^{n+1}) = F_{x_{ij}}^n + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{U=U_{ij}}^n (U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n), \quad (2.7)$$

где U_{ij}^n – осредненное по Роу [4] значение между U_i^n и \tilde{U}_{ij}^n ; $\tilde{U}_{ij}^n = U_k^n$ – такое переобозначение, когда k -ая ячейка является соседней с i -ой ячейкой, и для них обеих j -ая граница i -ой ячейки является общей.

Матрица Якоби $\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)$ обладает набором действительных собственных значений и векторов, и поэтому может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} A &= R\Lambda L = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)L = A^+ + A^-, \\ A^+ &= R\Lambda^+L, \\ A^- &= R\Lambda^-L, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$, $\Lambda^+ = \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|)$, $\Lambda^- = \frac{1}{2}(\Lambda - |\Lambda|)$, $|\Lambda| = \text{diag}\{|\lambda_i|\}$.

Опираясь на этот факт, для того чтобы сконструировать противопоточную разностную схему в дельта-форме, представим разложение (2.7) в виде:

$$F_{x_{ij}}^{n+1} = F_{x_{ij}}^n + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^+ (U_i^{n+1} - U_i^n) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^- (\tilde{U}_{ij}^{n+1} - \tilde{U}_{ij}^n). \quad (2.9)$$

Таким образом, получим неявную разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U_i^{n+1}}{\tau_i} S_i + \sum_{j=1}^3 l_{ij} \left[n_{x_{ij}} \left[F_{x_{ij}}^n + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^+ \Delta U_i^{n+1} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^- \Delta \tilde{U}_{ij}^{n+1} \right] \right] + \\ + \sum_{j=1}^3 l_{ij} \left[n_{y_{ij}} \left[F_{y_{ij}}^n + \left(\frac{\partial F_y}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^+ \Delta U_i^{n+1} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^- \Delta \tilde{U}_{ij}^{n+1} \right] \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для стационарного случая вычисления могут проводиться с собственным шагом по времени для каждой ячейки, в качестве параметров используя условие Куранта-Фридрихса-Леви. Тогда,

$$\tau_i = CFL \cdot \frac{S_i}{\sum_{j=1}^3 [l_{ij} \cdot \rho(A_{ij})]}, \quad (2.11)$$

где $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы Якоби $A = \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)$. Для нестационарного случая, τ_i для всех ячеек остаются постоянными.

Классическая реализация метода С. К. Годунова предполагает, что в каждой из ячеек значение газодинамических параметров U постоянно. Для двумерного случая с треугольной сеткой это можно представить как область, состоящую из треугольных ступенек, где высота ступеньки определяется значением U (понятно, что U это вектор, так что реально получается 4 области). Для повышения порядка точности по пространству применяются методы более интеллектуальной, чем кусочно-постоянная, реконструкции значений в ячейках.

В данной работе применяется, как кусочно-постоянная реконструкция, так и кусочно-линейная.

Кусочно-линейное распределение сеточной функции U ищется в виде:

$$U(x, y) = U_i + (x - x_i)\alpha_i + (y - y_i)\beta_i, \quad (2.12)$$

где α_i и β_i – некоторые коэффициенты; (x_i, y_i) – координаты центра масс ячейки с номером i .

Формула (2.12) определяет, как могут быть найдены значения газодинамических параметров на границе i -ого треугольника. На настоящий момент не получены достаточные условия, обеспечивающие ограниченность всех вариаций численного решения на произвольной сетке, т. е. применимость каждого конкретного метода реконструкции должна быть проверена [3].

Роль коэффициентов α_i и β_i играет значение $grad U(x, y)$ в точке (x_i, y_i) .

Градиент вычисляется в общем случае из теоремы о градиенте:

$$\iint_{\Delta_i} \nabla U dS = \oint_{\partial \Delta_i} U dl, \nabla U \approx \frac{1}{S} \oint_{\partial \Delta_i} U dl. \quad (2.13)$$

Для решения линейной системы уравнений, возникшей из-за (2.10), в данной работе применялся метод Гаусса-Зейделя.

Численный эксперимент. Возможности реализованной неявной схемы в рамках пакета программ cfd-2d демонстрируются на примере решения задач обтекания профиля NACA0012 невязким сжимаемым газом и задачи о сверхзвуковом обтекании клина.

Обтекание профиля NACA0012. Симметричный профиль NACA0012 обтекается потоком невязкого газа с числом Маха $M=0.7$ под углом атаки 1.489 градусов, при давлении 46066.16 Па и температуре 248 К. Используя эти данные, вычисляются остальные параметры исходя из термодинамических соотношений.

В качестве сравнительной характеристики между результатом численного метода и ранее проведенным экспериментом рассматривается коэффициент давления по поверхности профиля.

$$C_p = \frac{p}{(p_\infty u_\infty^2)/2}, \quad (3.1.1)$$

где p_∞, u_∞^2 – параметры набегающего потока.

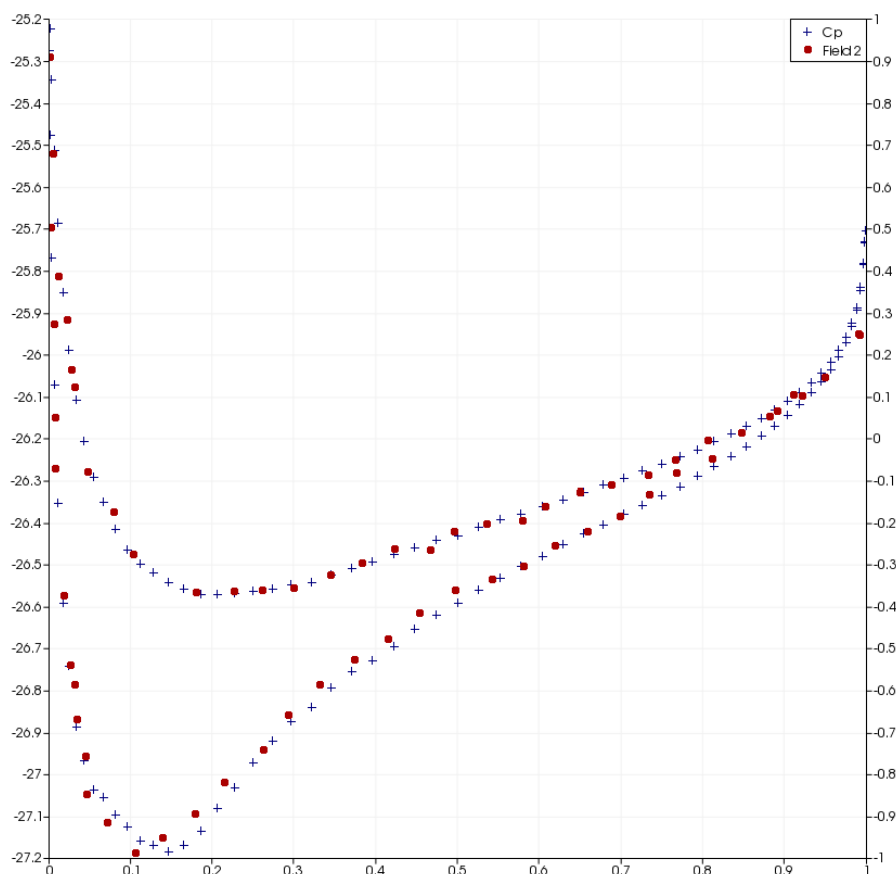


Рис. 1. Распределение коэффициентов давления

Распределение коэффициентов давления показано на (рис. 1) и демонстрирует хорошее совпадение с экспериментом (синий маркер – эксперимент; красный – результаты расчета).

Сверхзвуковое обтекание клина. Рассчитывается задача о сверхзвуковом обтекании клина с углом в 10 градусов в плоском канале (рис. 2), при числе Маха $M=2$, при давлении $P = 101325\text{Па}$ и температуре 300К . Производится анализ системы скачков уплотнения возникающих при обтекании клина и многократного отражения начального скачка от стенок канала.

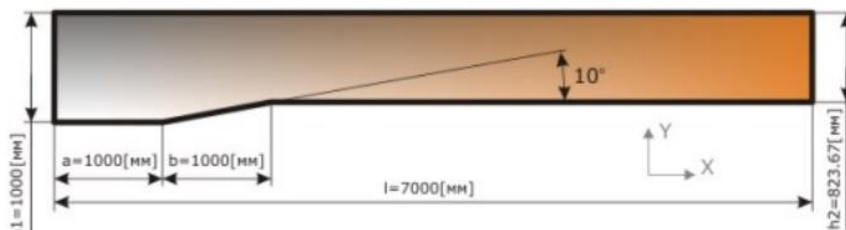


Рис. 2. Сверхзвуковое обтекание клина с углом в 10 градусов в плоском канале

На (рис. 3) и (рис. 4) представлено распределение полей числа Маха и давления.

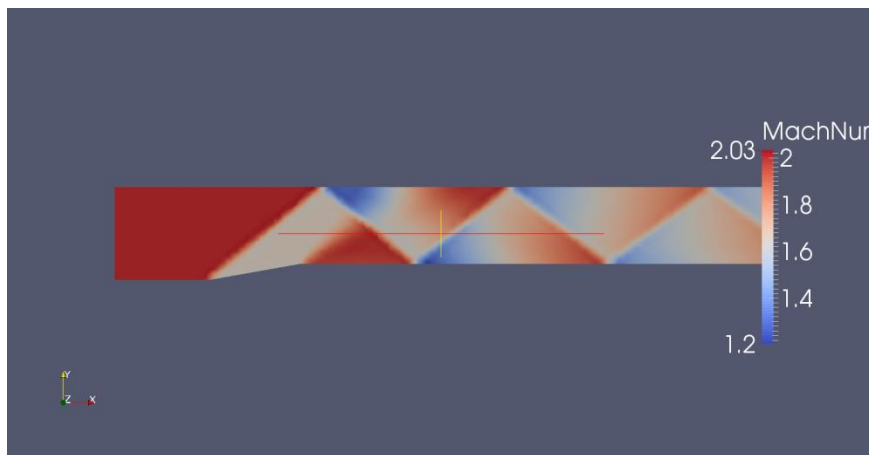


Рис. 3 Распределение полей числа Маха

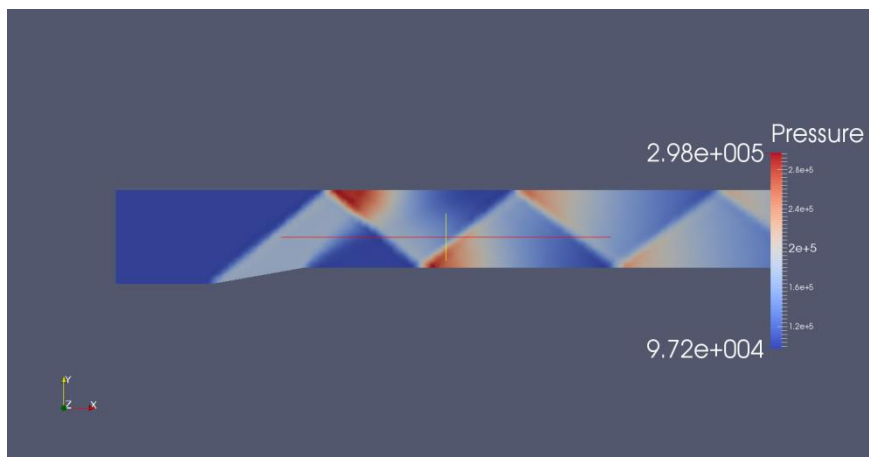


Рис.4 Распределение полей давления

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся плоскостях. – М.: Физматлит, 2010. – 486 с.
2. Елизарова Т. Г. Лекции. Математическая модель и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. – М.: Физ. факультет МГУ, 2005. – 224 с.
3. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семёнов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
4. Roe P. L. Approximate Riemann Solvers, Parameters Vectors and Difference Schemes // Journal of Computations Phys., 1981. – Vol. 43. – pp. 357-378.
5. Toro E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. – Verlag: Springer, 1999. – 624 p.
6. Пакетпрограмм для моделирования турбулентных течений сжимаемого газа. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://code.google.com/p/cfd-2d/>
7. Программа генерации сетки. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>