

**КУЗЬМИЧЕВ Н. Д., ЧУГУНОВ М. В., ШИТОВ А. Ю.**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТНОГО  
ОТКЛИКА ЖЕСТКОГО СВЕРХПРОВОДНИКА В ВИДЕ ТОНКОГО ДИСКА  
С МАГНИТНО-ПОЛЕВОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ  
ТОКА**

**Аннотация.** Выполнено математическое моделирование гармоник намагниченности жесткого сверхпроводника второго рода в виде тонкого диска в приближении экранировки поля в центре образца для модели критического состояния с  $J_c \sim \gamma/H^2$ . Рассчитаны гистерезисные кривые намагниченности и ряд зависимостей действительной и мнимой частей первой, третьей и пятой гармоник намагниченности от величины напряженностей переменного и постоянного магнитных полей. Выявлено значительное влияние амплитуды переменного магнитного поля на зависимости амплитуд гармоник намагниченности.

**Ключевые слова:** жесткий сверхпроводник II рода, критическое состояние, тонкий диск, критическая плотность тока, петля гистерезиса намагниченности, гармоники намагниченности.

**KUZMICHEV N. D., CHUGUNOV M. V., SHITOV A. Yu.**

**MATHEMATICAL MODELING OF NON-LINEAR MAGNETIC RESPONSE OF  
RIGID THIN DISK SUPERCONDUCTOR WITH MAGNETIC FIELD DEPENDENCE  
ON CRITICAL CURRENT DENSITY**

**Abstract.** The study presents a mathematical model of magnetization harmonics for hard II-type thin disk superconductors. According to the critical state model with  $J_c \sim \gamma/H^2$  in approximation of magnetic field screening in the disk center, the authors have calculated hysteretic magnetization curves and the dependence of real and imaginary components of the first, third and fifth magnetization harmonics on voltage value of variable and static magnetic fields. Variable magnetic field amplitude has a considerable effect on magnetization harmonics amplitudes.

**Keywords:** II-type hard superconductor, critical state, thin disk, critical current density, hysteric loop of magnetization, magnetization harmonics.

В настоящей работе рассмотрен процесс проникновения магнитного поля в диск жесткого сверхпроводника II рода в приближение полной экранировки внешнего магнитного поля в центре образца. Использовалась следующая зависимость критической плотности тока от магнитного поля:  $J_c(H) = \gamma/H^2$ . Это выражение приближенно описывает

ситуацию при высокой плотности проникших в образец вихрей и для керамических сверхпроводников [1]. В этом случае уравнение критического состояния для очень тонкого диска радиуса  $R$  и полутолщины  $b$  ( $R \gg b$ ) [2] в аксиальном внешнем поле имеет вид:

$$\frac{dH}{dr} = \pm \frac{\gamma b}{H^2 r}. \quad (1)$$

Здесь  $r$  есть текущий радиус цилиндра,  $H(r)$  представляет собой осевую составляющую напряженности магнитного поля. Знак правой части уравнения (1) определяется знаком производной по времени от внешнего поля, т.е. знаком  $dH/dt$ . Вышеуказанная зависимость  $J_c(H)$  рядом авторов использовалось для описания критического состояния гранулярных поликристаллических высокотемпературных сверхпроводников [1].

Уравнение (1) решается с граничным условием  $H(R) = H_e$ . Где  $H_e$  – напряженность внешнего магнитного поля. Знак (+) в уравнении (1) соответствует растущему во времени магнитному полю, а знак (–) убывающему полю. Решение (1) для растущего поля имеет вид:

$$H(r) = \left[ H_e^3 - 3\gamma b \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (2)$$

а для убывающего решение уравнения (1) есть:

$$H(r) = \left[ H_e^3 + 3\gamma b \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (3)$$

Намагниченность  $M(H_e)$  сверхпроводника в виде тонкого диска вычислялась согласно формуле используемой для определения магнитного момента системы токов [3] учитывая, что экранирующий ток в силу цилиндрической симметрии является азимутальным:

$$M(H_e) = \frac{I}{2V} \int_{\rho}^R [r, J_c] dV. \quad (4)$$

Здесь  $V$  – объем сверхпроводника,  $\rho$  - радиус внутренней части цилиндра, куда поле не проникло.

Начальная кривая намагниченности для возрастающего внешнего поля от 0 до  $H_e$  следуя (4) вычисляется по формуле:

$$M_{in}(H_e) = -\frac{I}{R^2} \int_{\rho(H_e)}^R J_c(H) r^2 dr = -M_0 \cdot \exp\left(-\frac{H_e^3}{\gamma b}\right) \int_0^{(H_e^3/3\gamma b)} \frac{e^{3z}}{z^{2/3}} dz. \quad (5).$$

Здесь  $M_0 = \left( \frac{\gamma R^3}{9b^2} \right)^{1/3}$ . Интеграл в выражении (6) не выражается через элементарные функции.

В переменном магнитном поле ( $H_c(t) = H_0 + h \cdot \cos(\omega t)$ ) сверхпроводник разбивается на области с противоположно текущими экранирующими сверхтоками (рис.1). Это приводит к гистерезису в намагничивании жесткого сверхпроводника. Уравнения кривых, которые определяют петлю гистерезиса намагниченности, будут выражаться следующими интегралами:

$$\begin{cases} M_+(H_0, h) = -\frac{I}{R^2} \left[ \int_{\rho}^{\lambda} J_c(H) r^2 dr - \int_{\lambda}^{\zeta} J_c(H) r^2 dr + \int_{\zeta}^R J_c(H) r^2 dr \right] \\ M_-(H_0, h) = -\frac{I}{R^2} \left[ \int_{\rho}^{\xi} J_c(H) r^2 dr - \int_{\xi}^R J_c(H) r^2 dr \right] \end{cases} \quad (6)$$

где  $M_+(H_0, h)$  – ветвь петли в возрастающем поле, а  $M_-(H_0, h)$  – ветвь петли для убывающего внешнего магнитного поля. Здесь  $\rho$  – радиус центральной части диска, куда возрастающее поле до величины  $H_0 + h$  еще не проникло,  $\lambda$  – внутренний радиус кольцевого слоя диска с противоположно текущим экранирующим сверхтоком в убывающем поле до значения  $H_0 - h$  и  $\zeta$  – внешний радиус этого же кольцевого слоя диска. Величина  $\xi$  является внутренним радиусом кольцевого слоя в убывающем поле от значения  $H_0 + h$  до текущего значения  $H(t)$  (см. рис. 1).

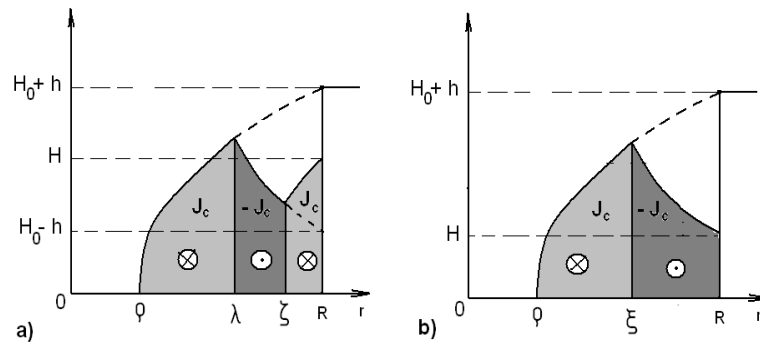


Рис.1. Разбиение сверхпроводника в постоянном и переменном аксиальных магнитных полях на области с противоположно текущими сверхтоками:

а) Возрастающее поле проникло на глубину  $R-\rho$ , убывающее – на глубину  $R-\lambda$  и снова возрастающее на  $R-\zeta$  (ветвь петли гистерезиса в растущем поле –  $M_+$ ).

б) Возрастающее поле проникло на глубину  $R-\rho$ , убывающее – на глубину  $R-\xi$  (ветвь петли гистерезиса в убывающем поле –  $M_-$ ).

Аналитический расчет для  $M_-$  и  $M_+$  приводит следующим выражениям:

$$M_-(H_0, h, H_e) = -M_0 \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{(H_0 + h)^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_0^{[(H_0 + h)^3 + H_e^3]/6\gamma b} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} + \right. \\ \left. + \exp\left(\frac{H_e^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_{[(H_0 + h)^3 + H_e^3]/6\gamma b}^{H_e^3/3\gamma b} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} \right\} \quad (7)$$

$$M_+(H_0, h, H_e) = -M_0 \cdot \left\{ \begin{aligned} & \exp\left(-\frac{(H_0+h)^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_0^{\left[\frac{H_0+h}{\gamma b}\right]^{1/3}} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} + \\ & + \exp\left(\frac{(H_0-h)^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_{\left[\frac{H_0-h}{\gamma b}\right]^{1/3}}^{\left[\frac{H_0+h}{\gamma b}\right]^{1/3}} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} + \\ & + \exp\left(-\frac{H_e^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_{\left[\frac{H_0-h}{\gamma b}\right]^{1/3}}^{\left[\frac{H_e}{\gamma b}\right]^{1/3}} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

На практике важны гармоники намагниченности, так как экспериментально их достаточно легко измерить. В работе [4] показано, что вклад в синфазные (действительные) части гармоник дает средняя кривая намагниченности  $\overline{M}(H_0, h, H_e)$ , а в квадратурные (мнимые) составляющие вклад дает разностная кривая намагниченности  $\Delta M(H_0, h, H_e)$ .

На рисунке 2 приведены расчеты амплитуд 1 гармоники намагниченности в зависимости от величины амплитуды  $h$  напряженности внешнего переменного магнитного поля. Из рисунка видно, что гармоники имеют максимумы, положения которых зависят от номера гармоники. С ростом  $n$  максимум смещается в сторону роста  $h$ . Максимумы обусловлены конкуренцией двух механизмов – увеличением объема сверхпроводника занятого сверхтоком и подавлением величины  $J_c$  с ростом поля.

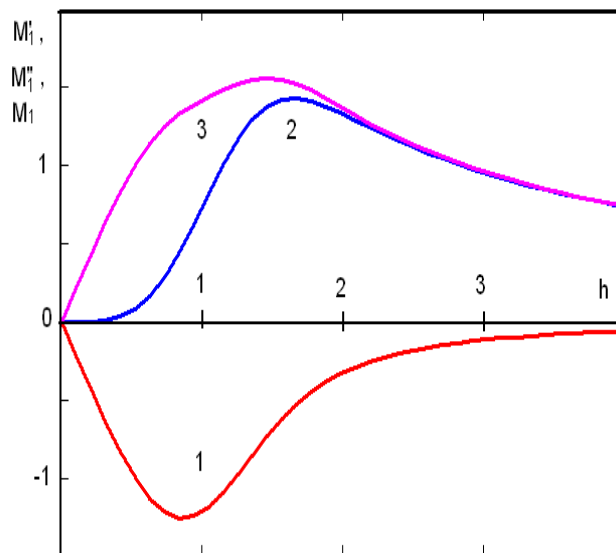


Рис. 2. Амплитуды действительной  $M_1'$  - 1, мнимой  $M_1''$  - 2 частей и модуля  $M_1$  - 3 первой гармоники намагниченности в зависимости от амплитуды  $h$  переменного магнитного поля. Магнитное поле выражено в единицах  $H_p = (\gamma b)^{1/3}$ , амплитуды гармоник намагниченности в единицах  $M_0$  (6).

Учитывая данные рисунка 2 (кривая 2), получим, что максимум потерь на перемагничивание сверхпроводника приходится на величину  $h_m \approx 1.7H_p$ . Величина равна  $H_p = (\gamma b)^{1/3}$ .

На рисунках 3 – 5 представлены расчеты амплитуд 1 и 3 гармоник намагниченности в зависимости от величины напряженности внешнего постоянного магнитного поля  $H_0$  при 2-х значения амплитуды модуляции  $h = 0.25H_p$  и  $H_p$ . Для  $h = 0.25H_p$  из рис. 3 видно, что потери с ростом возрастают и достигают максимума при  $H_0 \approx 2 H_p$ . При  $h = H_p$  и  $H_0 = 0$  потери максимальны. Третья гармоника намагниченности имеет сложную зависимость с переменной знака, как в действительной части, так и в мнимой части для  $h = H_p$  (рис. 5). Пятая гармоника имеет ещё более сложную зависимость с большим числом максимумов и минимумов.

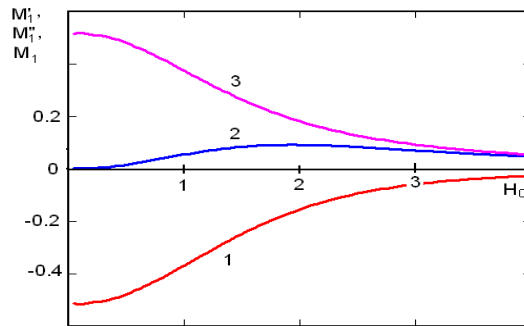


Рис. 3. Зависимости действительной  $M_1'$  - 1, мнимой  $M_1''$  - 2 частей и модуля  $M_1$  - 3 первой гармоники намагниченности от постоянного поля  $H_0$  для  $h = 0.25H_p$ .

Напряженность магнитного поля выражена в единицах  $H_p = (\gamma b)^{1/3}$ , а амплитуды гармоник намагниченности в единицах  $M_0$  (6).

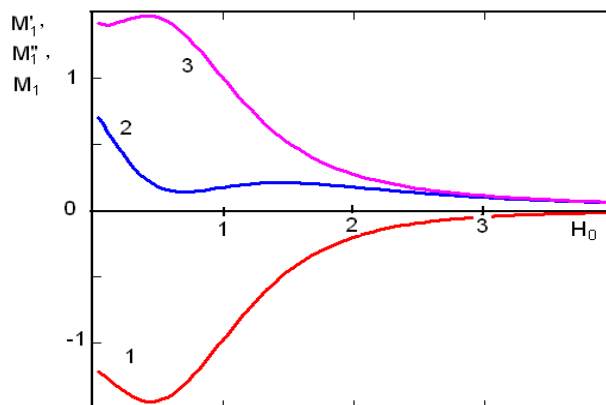


Рис. 4. Зависимости действительной  $M_1'$  - 1, мнимой  $M_1''$  - 2 частей и модуля  $M_1$  - 3 первой гармоники намагниченности от постоянного поля  $H_0$  для  $h = H_p$ . Напряженность магнитного поля выражена в единицах  $H_p = (\gamma b)^{1/3}$ , а амплитуды гармоник намагниченности в единицах  $M_0$  (6).

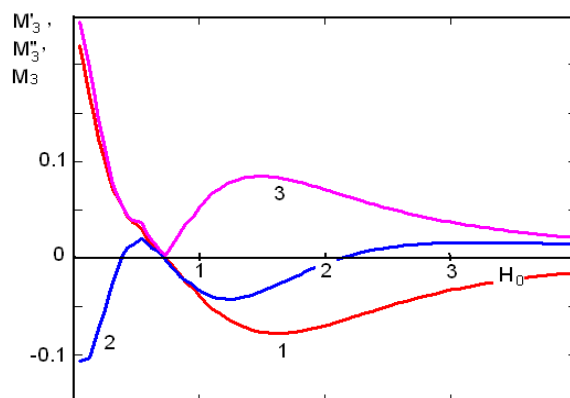


Рис. 5. Амплитуды действительной  $M_3'$  - 1, мнимой  $M_3''$  - 2 частей и модуля  $M_3$  - 3 первой гармоники намагниченности в зависимости от постоянного магнитного поля  $H_0$  для  $h = H_p$ . Магнитное поле выражено в единицах  $H_p = (\gamma b)^{1/3}$ , амплитуды гармоник намагниченности в единицах  $M_0$ .

Жесткие сверхпроводники важны для практических приложений, например, в электротехнике, радиотехнике и других областях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lam Q. H., Kim Y. and Jeffries C. D. Nonlinear electrodynamics in granular  $YBa_2Cu_3O_7$ : Measurements and models of complex permeability // Phys. Rev. B. – 1990. – V.42. – pp. 4846–4849.
2. Кузьмичев Н. Д., Федченко А. А. Математическое моделирование нелинейного отклика короткого цилиндра из жесткого сверхпроводника// ИзВУЗ. Поволжский регион. – 2011. – №3 (19) – С. 110–119.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
4. Кузьмичев Н. Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // ЖТФ. – 1994. – Т. 64. – Вып. 12. – С. 63–74.