ЕРЕМИНА Е.П.

ПОСТРОЕНИЕ ДИВЕРГЕНТНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Аннотация. В статье рассмотрена задача распространения звуковых волн в неоднородной среде. Получены интегральные законы сохранения и выведены соответствующие дивергентные разностные схемы.

Ключевые слова: двумерная акустика, закон сохранения, дивергентная разностная схема, обобщенное решение.

YEREMINA E.P.

DIVERGENT DIFFERENCE SCHEME FOR ACOUSTICS EQUATIONS SYSTEM IN NON-HOMOGENEOUS MEDIUM

Abstract. The article considers the problem of sound waves propagation in a non-homogeneous medium. Particularly, the author deduces the integral conservation laws. As a result, the divergent difference schemes are derived.

Keywords: two-dimensional acoustics, conservation law, divergent difference scheme, generalized solution.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальный уравнений, описывающую распространение звуковых волн в неоднородной среде, а также начальные условия, характеризующие состояние системы в начальный момент времени

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho(t,x,y)}\,p(t,x,y)\right)=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v(t,x,y)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho(t,x,y)}\,p(t,x,y)\right)=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t}+c_o^2\frac{\partial}{\partial x}\big(\rho(t,x,y)u(t,x,y)\big)+c_o^2\frac{\partial}{\partial y}\big(\rho(t,x,y)v(t,x,y)\big)=0 \tag{1.3}$$

$$u(t,x,y)\big|_{t=0}=u_0(x,y) \tag{1.4}$$

$$v(t,x,y)\big|_{t=0}=v_0(x,y) \tag{1.5}$$

$$p(t,x,y)\big|_{t=0}=p_0(x,y) \tag{1.6}$$

$(t,x,y)\in D\cup S$, $S-$граница области *D*.

Здесь $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$, $p(t,x,y)$ -отклонения скоростей и давления от их значений в невозмущенной среде, $\rho(t,x,y)$ -плотность среды в момент времени t в точке (x,y), c_o- скорость распространения звука.

2. Обобщенное решение системы по Л.С. Соболеву

Рассмотрим бесконечные дифференцируемые функции $\varphi(t,x,y)$, $\psi(t,x,y)$, $\theta(t,x,y)$, носитель которых принадлежит ограниченной области.

Рассмотрим некоторое выражение:

$$\frac{\partial(u\varphi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}p\varphi\right)+\frac{\partial(v\psi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}p\psi\right)+\frac{\partial(p\theta)}{\partial t}+c_o^2\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\theta)+c_o^2\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\theta) \quad (2.1)$$

После некоторых преобразований из выражения (2.1) получим следующее соотношение:

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho}p\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{\rho}p\frac{\partial\psi}{\partial y}+p\frac{\partial\theta}{\partial t}+c_0^2\rho u\frac{\partial\theta}{\partial x}+c_0^2\rho v\frac{\partial\theta}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}(u+v+p)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}p+c_0^2\rho u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}p+c_0^2\rho u\right) \quad (2.2)$$

Проинтегрируем выражение (2.2) по области D, далее применим формулу Остроградского-Гаусса. Конкретизируем область *D* и границу *G*следующим образом:

$$D: t\geq 0\text{, S:t=0}$$

Рассмотрим три случая:

$$\psi(t,x,y)\equiv 0,\ \theta(t,x,y)\equiv 0,\ \varphi(t,x,y)\neq 0 \quad (2.3)$$

$$\psi(t,x,y)\equiv 0,\ \theta(t,x,y)\neq 0,\ \varphi(t,x,y)\equiv 0 \quad (2.4)$$

$$\psi(t,x,y)\neq 0,\ \theta(t,x,y)\equiv 0,\ \varphi(t,x,y)\equiv 0 \quad (2.5)$$

Получим обобщенное решение по Л.С Соболеву для задачи (1.1) – (1.6)

$$\int_{t\geq 0}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho(t,x,y)}p(t,x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dtdxdy=\int_{t=0}u\varphi dxdy \quad (2.6)$$

$$\int_{t\geq 0}\left(v\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{\rho(t,x,y)}p(t,x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dtdxdy=\int_{t=0}v\psi dxdy \quad (2.7)$$

$$\int_{t\geq 0}\left(p\frac{\partial\theta}{\partial t}+c_0^2\rho u\frac{\partial\theta}{\partial x}+c_0^2\rho v\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)dtdxdy=\int_{t=0}p\theta dxdy \quad (2.8)$$

3. Интегральный закон сохранения для системы уравнений акустики

Рассмотрим поверхности γ и γ', на которых функции $\varphi(t,x,y)$, $\psi(t,x,y)$, $\theta(t,x,y)$ определены следующим образом:

$$\varphi(x,y,t),\psi(x,y,t),\theta(x,y,t)=\begin{cases}1 \ \textit{внутри } \gamma\\ 0 \ \textit{вне } \gamma'\\ \textit{изменяется от } 1 \ \textit{до } 0 \ \textit{от } \gamma \ \textit{до } \gamma'\end{cases}$$

Рассмотрим выражение (2.6). Запишем первый интеграл выражения (2.6) в следующем виде:

$$\iint_{\gamma\gamma'}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho}p\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dtdxdy \qquad (3.1)$$

Интегрирование по полосе заменим интегрированием по нормали. С учетом правой части выражения (2.6) получим интегральный закон сохранения:

$$\oiint udxdy-\frac{1}{\rho}pdtdy=0\,. \qquad (3.2)$$

Аналогично для выражений (2.7) и (2.8) получим:

$$\oiint vdxdy-\frac{1}{\rho}pdtdx=0\,. \qquad (3.3)$$

$$\oiint pdxdy-c_0^2\rho udtdy-c_0^2\rho vdxdy=0\,. \qquad (3.4)$$

Таким образом (3.2) –(3.4) – интегральные законы сохранения для задачи (1.1) – (1.6).

4. Конструирование системы дивергентных разностных уравнений

Рассмотрим сетку следующего вида:

$$t=k\tau,\ x=\left(i+\frac{1}{2}\right)h,\ y=\left(j+\frac{1}{2}\right)h,\ k=0,1,...;i=0,\pm1,...j=0,\pm1,... \qquad (4.1)$$

Введем следующие обозначения:

$$[u]_h\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j\\ t=t_k}}\equiv\tilde{u}_{i,j,k}=\frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}u(x,y,t_k)dxdy, \qquad (4.2)$$

$$[u]_h\Big|_{\substack{x=x_{i+1/2}\\ y=y_j\\ t=t_k}}\equiv\tilde{U}_{i+1/2,j,k}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}u(x_{i+1/2},y,t)dydt\ , \qquad (4.3)$$

$$\left[p\right]_h\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j\\ t=t_k}} \equiv \widetilde{p}_{i,j,k} = \frac{1}{h^2}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int\limits_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p(x,y,t_k)dxdy\ , \tag{4.4}$$

$$\left[p\right]_h\Big|_{\substack{x=x_{i+1/2}\\ y=y_j\\ t=t_k}} \equiv \widetilde{P}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\int\limits_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p(x_{i+1/2},y,t)dydt, \tag{4.5}$$

$$\left[v\right]_h\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j\\ t=t_k}} \equiv \widetilde{V}_{i,j,k} = \frac{1}{h^2}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int\limits_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} v(x,y,t_k)dxdy\ , \tag{4.6}$$

$$\left[v\right]_h\Big|_{\substack{x=x_{i+1/2}\\ y=y_j\\ t=t_k}} \equiv \widetilde{V}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\int\limits_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} v(x_{i+1/2},y,t)dydt, \tag{4.7}$$

Связь между величинами (4.2) – (4.7) установим исходя из интегрального закона сохранения (3.2) –(3.4). Получим дивергентные разностные схемы:

$$\frac{\rho(t_k,x_i,y_j)\left(\widetilde{u}_{i,j,k+1}-\widetilde{u}_{i,j,k}\right)}{\tau}-\frac{\widetilde{P}_{i+1/2,j,k}-\widetilde{P}_{i-1/2,j,k}}{h}=0 \tag{4.8}$$

$$\frac{\rho(t_k,x_i,y_j)\left(\widetilde{v}_{i,j,k+1}-\widetilde{v}_{i,j,k}\right)}{\tau}-\frac{\widetilde{P}_{i,j+1/2,k}-\widetilde{P}_{i,j-1/2,k}}{h}=0 \tag{4.9}$$

$$\frac{\widetilde{p}_{i,j,k+1}-\widetilde{p}_{i,j,k}}{\tau}-c_0^2\rho(t_k,x_i,y_j)\frac{\widetilde{U}_{i+1/2,j,k}-\widetilde{U}_{i-1/2,j,k}}{h}-c_0^2\rho(t_k,x_i,y_j)\frac{\widetilde{V}_{i,j+1/2,k}-\widetilde{V}_{i,j-1/2,k}}{h}=0 \tag{4.10}$$

Таким образом (4.8) –(4.10) – дивергентные разностные схемы для задачи (1.1) – (1.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Киреев В. И. Численные методы в примерах и задачах / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – 2-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.
2. Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
3. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.