ПАНТЮШИН А.И.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Аннотация. Построение вычислительных алгоритмов основано на конечно-объемном методе, используя формулу Остроградского-Гаусса, а решение на временных слоях ищется по неявной схеме методом итераций.

Ключевые слова: фильтрация, неструктурированная сетка, флюид, пористость, аппроксимация.

PANTYUSHIN A.I.

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING FILTRATION EQUATION

Abstract. The article focuses on the construction of numerical algorithms based on the finite volume method by using the formula of Ostrogradsky-Gauss. The decision on the temporary layers is tried in the implicit scheme by iteration.

Keywords: filtration, unstructured mesh, fluid, porosity, approximation.

Рассмотрим однофазную изотермическую фильтрацию флюида в пористой среде [1,2].

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\rho\frac{k_o K_a}{\mu}\mathrm{grad}(p+\rho g z)\right) + \rho q. \tag{1}$$

где ρ – плотность флюида, q – накачка, или интенсивность выработки, k_a – коэффициент абсолютной фазовой проницаемости, K_o – коэффициент абсолютной фазовой проницаемости.

Уравнение состояния для несжимаемой жидкости записывается в виде

$$T = \mathrm{Const}_1,\ \rho = \mathrm{Const}_2,\ \varphi = \mathrm{Const}_3,\ \mu = \mathrm{Const}_4,\ k_o = \mathrm{Const}_5,\ d(\varphi\rho) = \rho\eta dH, \tag{2}$$

где η – коэффициент упругоемкости скелета породы. В этом случае уравнение фильтрации записывается в виде:

$$\eta\frac{\partial H}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\rho\frac{k_o K_a}{\mu}\,\mathrm{grad}\,H\right) + \rho q, \tag{3}$$

$$\eta = \rho\eta^*. \tag{4}$$

Построение вычислительных алгоритмов основано на конечно-объемном методе. В этом методе исходные уравнения записывается в дивергентном виде в декартовых координатах. Разностные формулы получаются в результате интегрирования уравнений по контрольному объему. Контрольные объемы (ячейки сетки) являются произвольными многогранниками, покрывающими расчетную область без зазоров и наложений. Каждый многогранник ограничен произвольным числом граней. Вершинами (узлами) граней являются узлы разностной сетки:

$$\boldsymbol{\Omega} = \left\{ \left(\mathbf{x}_\mathbf{i}, \mathbf{y}_\mathbf{i}, \mathbf{z}_\mathbf{i} \right) : 1 \le \mathbf{i} \le \mathbf{N} \right\}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{i}$ – номер узла. Общий вид ячейки показан на рисунке 1.

Неструктурированная сетка задается списками ячеек сетки. В списке ячеек указываются число граней, номера граней, образующих ячейку, координаты геометрического центра ячейки, объем ячейки, а также список определяющих расчетных параметров, которые относятся на каждый момент времени к центру ячейки [5]. Для алгоритма расчета процесса фильтрации, список ячеек имеет следующую структуру:

$$\mathrm{Cell} = \left\{ \mathrm{P} : \mathrm{F}, (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, ..., \mathrm{f}_\mathrm{F}), \left(\mathrm{x}_\mathrm{P}, \mathrm{y}_\mathrm{P}, \mathrm{z}_\mathrm{P} \right), \, \Delta \mathrm{V}_\mathrm{P}, \, \left(\rho, \mathrm{p}, \mathrm{H}, \mathrm{T}, \mathrm{k}_\mathrm{o}, \mathrm{K}_\mathrm{a}, ... \right)_\mathrm{P} \right\}, \qquad (6)$$

где P – номер ячейки, F – количество граней, $(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, ..., \mathrm{f}_\mathrm{F})$ – список граней ячейки, $\left(\mathrm{x}_\mathrm{P}, \mathrm{y}_\mathrm{P}, \mathrm{z}_\mathrm{P} \right)$ – координаты центра ячейки, $\Delta \mathrm{V}_\mathrm{P}$ – объем ячейки, $\left(\mathrm{p}, \mathrm{H}, \mathrm{T}, \mathrm{k}_\mathrm{o}, \mathrm{K}_\mathrm{a}, ... \right)_\mathrm{P}$ – расчетные параметры, отнесенные к центру ячейки, $\Delta \mathrm{S}_\mathrm{f}$ – площадь грани.

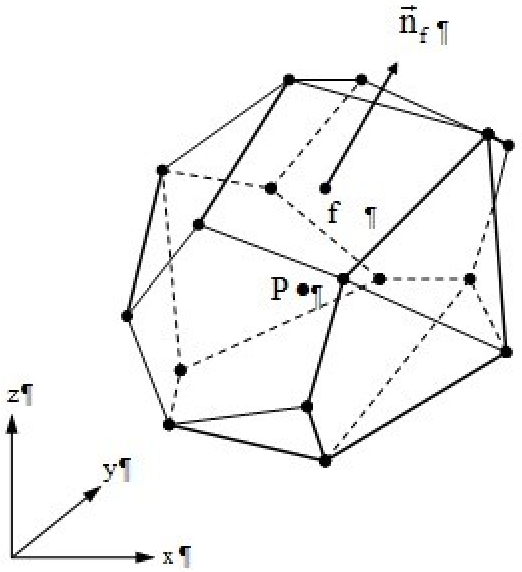

Рис.1. Общий вид ячейки сетки

Проинтегрируем уравнение (3) по объему ячейки $\Delta \mathrm{V}_\mathrm{P}$ ограниченной поверхностью $\Sigma_\mathrm{P} = \bigcup\limits_{\mathrm{f}=1}^{\mathrm{F}}$ и, используя формулу Гаусса-Остроградского, запишем интегральный закон уравнения фильтрации:

$$\int\limits_{\Delta V_p} \eta \frac{\partial H}{\partial t} dV - \oint\limits_{\sum_p} (\chi \operatorname{grad} H \cdot \vec{n}) dS = \int\limits_{\Delta V_p} \rho Q dV . \qquad (7)$$

Заменим интегральные выражения разностными. Будем использовать теорему о среднем. В качестве среднего значения функции по объему примем значение ее в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани - значение ее в центре грани [8]. Тогда уравнения (7) в полудискретном виде запишется так:

$$\left(\eta \Delta V\right)_P \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_P - \sum_{f=1}^{F} \left(\chi \operatorname{grad} H \cdot \vec{n}\right)_f \Delta S_f = \left(\rho Q \Delta V\right)_P . \qquad (8)$$

Чтобы описать численный алгоритм, введем обозначение: $\Lambda(T)$ - разностный оператор, аппроксимирующий фильтрационные потоки через грани ячейки. Перепишем формулу (8) с учетом новых обозначений:

$$\left(\eta \Delta V\right)_P \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_P - \Lambda(H) = \left(\rho Q \Delta V\right)_P . \qquad (9)$$

Соответственно, разностная аппроксимация стационарного уравнения теплопроводности в операторной форме будет иметь вид:

$$-\Lambda(H) = \left(\rho Q \Delta V\right)_P \qquad (10)$$

Производную по времени будем аппроксимировать либо по схеме первого порядка:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H^{n+1} - H^n}{\tau^n}, \qquad (11)$$

либо по схеме второго порядка точности (разложение проводится в точке $\left(t^{n+1}, \vec{R}_j\right)$):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\tau^n} \left(\frac{\left(\tau^{n-1} + 2\tau^n\right)}{\left(\tau^n + \tau^{n-1}\right)} H^{n+1} - \frac{\tau^n + \tau^{n-1}}{\tau^{n-1}} H^n + \frac{\left(\tau^n\right)^2}{\tau^{n-1}(\tau^n + \tau^{n-1})} H^{n-1} \right) \qquad (12)$$

Отметим, что для равномерного шага по времени (12) приобретает вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{3}{2} H^{n+1} - 2H^n + \frac{1}{2} H^{n-1} \right) \qquad (13)$$

Представим (10) и (11) в общем виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\tau^n} \left(1 + \frac{\sigma \tau^n}{\tau^n + \tau^{n-1}} \right) \left(H^{n+1} - H^n \right) - \frac{\sigma \tau^n}{\tau^{n-1}\left(\tau^n + \tau^{n-1}\right)} \left(H^n - H^{n-1} \right), \qquad (14)$$

где параметр σ может принимать значения: $0 \le \sigma \le 1$. Для схемы первого порядка аппроксимации: $\sigma = 0$. Для схемы второго порядка аппроксимации: $\sigma = 1$.

Подставляя выражение для производной по времени (14) в (9) и аппроксимируя разностный оператор по верхнему временному слою, получим следующую неявную схему:

$$\frac{1}{\tau^n}\left(1+\frac{\sigma}{\tau^n+\tau^{n-1}}\right)(\eta\Delta V)_P\left(H_P^{n+1}-H_P^n\right)-\Lambda(H^{n+1})=\left(Q\rho\Delta V\right)_P+\frac{\sigma\tau^n(\eta\Delta V)_P}{\tau^{n-1}\left(\tau^n+\tau^{n-1}\right)}\left(H_P^n-H_P^{n-1}\right), \tag{15}$$

Будем искать решение на новом временном слое по неявной схеме методом итераций. Тогда разностное уравнение (15) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau^n}\left(1+\frac{\sigma\tau^n}{\tau^n+\tau^{n-1}}\right)(\eta\Delta V)_P\left(H_P^{\gamma+1}-H_P^n\right)-\Lambda(H^{\gamma+1})=\\=\frac{\sigma(\eta\Delta V)_P}{\left(\tau^n+\tau^{n-1}\right)}\left(\frac{\tau^n}{\tau^{n-1}}H_P^n-H_P^{n-1}\right)+(Q)_P^n(\rho\Delta V)_P,\end{gathered} \tag{16}$$

где $\gamma-$номер итерации.

Проводя линеаризацию пространственного оператора, получим выражение:

$$\Lambda(H^{\gamma+1})=\Lambda(H^{\gamma+1})-\Lambda(H^\gamma)+\Lambda(H^\gamma)=\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial H}\right)\Delta H+\Lambda(H^\gamma), \tag{17}$$

где

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial H}\right)\Delta H=\sum_{f=1}^{F}\left(\left(\chi\,\mathrm{grad}\Delta H\right)\cdot\vec{n}\right)_f\Delta S_f. \tag{18}$$

С учетом (17) разностное уравнение (16) приведем к виду:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau^n}\left(1+\frac{\sigma\tau^n}{\tau^n+\tau^{n-1}}\right)(\eta\Delta V)_P\,\Delta H_P-\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial T}\right)^\gamma\Delta H=\Lambda(H^\gamma)-\\-\frac{1}{\tau^n}\left\{\left(1+\frac{\sigma\tau^n}{\tau^n+\tau^{n-1}}\right)\left(H_P^\gamma-H_P^n\right)-\frac{\sigma\tau^n}{\left(\tau^n+\tau^{n-1}\right)}\left(\frac{\tau^n}{\tau^{n-1}}H_P^n-H_P^{n-1}\right)\right\}(\eta\Delta V)_P+(Q)_P^n(\rho\Delta V)_P.\end{gathered} \tag{19}$$

Это так называемая дельта форма разностного уравнения, в котором искомое решение является приращение напора в ячейках разностной сетки, а правая часть разностных уравнений является невязкой, то есть погрешностью разностной аппроксимации уравнения фильтрации.

Стационарное распределение напора находится методом итераций, в которых приращение напора в каждой ячейки на новой итерации определяется из решения следующего уравнения:

$$\frac{\Delta H_P}{\omega}-\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial H}\right)^\gamma\Delta H=\Lambda(H^\gamma)+\left(Q\rho\Delta V\right)_P. \tag{20}$$

где $\omega-$ релаксационный параметр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. - М.: Наука, 1977. - 676 с.

2. Кочина П.Я., Кочина Н.Н. Гидромеханика подземных вод и вопросы орошения. - М.: Издательская фирма “Физико-Математическая литература”, 1994. – 117 с.

3. Баренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газов. - М.: Недра 1972. - 288 с.

4. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. - М.: Наука 1975. – 200 с.

5. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. - М.: Мир, 1964.

6. Баренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газов. - М.: Недра 1972. – 288 с.

7. Закиров С.Н., Сомов Б.Е., Гордон В.Я., Палатник Б.М., Юфин П.А. Многомерная и многокомпонентная фильтрация: Справочное пособие. - М.: «Недра», 1988. - 335с.

8. Величко О.М., Горев В.В., Горев и.В., Дерюгин Ю.Н. и др. Методика численного решения трехмерных задач переноса примесей подземными водами // Математическое моделирование. - 2001. - Т. 13 - № 2. - С 78-85.