

МИХЕЕВ Д.С., ПИЧУШКИН М.М.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА

**Аннотация.** В статье рассмотрены уравнения, описывающие движение жидкостей и газов, в код программы для моделирования задач гидродинамики `cfld_2d`, разрабатываемой на кафедре прикладной математики, добавлена возможность расчёта течений вязкого газа. Также проведён анализ решения типовых задач.

**Ключевые слова:** гидродинамика, вязкость, численное моделирование, уравнения Навье-Стокса.

MIKHEEV D.S., PICHUSHKIN M.M.

## COMPUTER SIMULATION OF VISCOUS GAS FLOWS

**Abstract.** The article considers equations to describe fluid and gas motions. Particularly, the authors have added formulas for viscous fluid flows computing to the code of fluid mechanics computational program `cfld_2d` developed by the Chair of Applied Mathematics. The article also includes an analysis of typical problems.

**Key words:** fluid mechanics, viscosity, computational simulation, Navier-Stokes equations.

Многие вопросы современной науки и техники в той или иной мере связаны с решением уравнений газовой динамики, описывающих движение сплошной сжимаемой среды. Одними из важнейших уравнений являются уравнения Навье-Стокса, описывающие движение вязкой ньютоновской жидкости. Они широко применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач.

Для прямоугольной декартовой системы координат  $(x, y)$  все уравнения, входящие в систему уравнений Навье-Стокса, можно записать в следующей общей консервативной форме [2]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^e - \partial F^v}{\partial x} + \frac{\partial G^e - \partial G^v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

где консервативные переменные  $U$  и декартовы компоненты  $F^e$  и  $G^e$  функции невязкого потока и компоненты  $F^v$  и  $G^v$  функции вязкого потока заданы в виде:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}; F^e = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ u(E + p) \end{pmatrix}; G^e = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix};$$

$$F^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{yx} \end{pmatrix}; G^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} \end{pmatrix};$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $u, v$  – компоненты вектора скорости;  $E$  – полная внутренняя энергия,  $t$  – время,  $p$  – давление.

Компоненты тензора вязких напряжений и вектора плотности теплового потока выражаются по формулам:

$$\tau_{xx} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\tau_{yy} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

где  $\lambda$  – коэффициент объёмной вязкости,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

В рамках данной работы в пакет программ cfd-2d [1] был добавлен код, отвечающий за расчёт вязких потоков.

Для расчёта целевых значений в программе используется метод конечных объёмов [2]. В качестве контрольного объёма возьмем ячейки сетки, являющиеся треугольниками. Тогда разностная схема имеет вид:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + \frac{1}{S_{\Delta i}} \left( \sum_{j=1}^3 \overline{F_{nij}^k} l_{ij} - \sum_{j=1}^3 \overline{H_{nij}^k} l_{ij} \right)$$

где  $\tau$  – шаг по времени,  $\overline{F_{nij}}$ ,  $\overline{H_{nij}}$  – конвективный и вязкий потоки на границе между ячейками  $\Delta i$  и  $\Delta j$  соответственно,  $l_{ij}$  – длина стороны треугольника. Отсюда выражается  $u_i^{k+1}$  – величина на следующем временном слое, и так далее до тех пор, пока не будет достигнуто заданное время и установление течения для стационарных задач.

Фактически алгоритм сводится к вычислению потоков на границе ячейки и нахождению значений вектора  $u_i$  на новом временном слое. Конвективные потоки получаются как решение задачи о распаде разрыва на границе между соответствующими ячейками [3]. Для вычисления вязких потоков предварительно вычисляются значения градиентов компонент скорости в ячейках, а затем значения компонент тензора вязких напряжений. Для вычисления градиентов используется формула Гаусса-Грина [4]:

$$\nabla u_i = \frac{1}{S_{\Delta_i}} \oint_{\partial \Delta_i} u \vec{n} dl.$$

Для проверки корректности работы программы были решены две задачи.

**Первая задача** – двумерная задача дозвукового ( $M=0.7$ ) обтекания симметричного крылового профиля NASA 0012 потоком вязкого газа.

Профиль обтекается потоком воздуха под углом атаки 1.489 градуса, при давлении 46066.16 Па и температуре 248 К.

Использовалась неструктурированная треугольная сетка [5]. В качестве сравнительной характеристики между результатом численного метода и ранее проведенным экспериментом рассматривается коэффициент давления по поверхности профиля (рис. 1).

$$C_p = \frac{p}{(\rho_{\infty} u_{\infty}^2)/2}, \text{ где } \rho_{\infty}, u_{\infty}^2 \text{ – параметры набегающего потока.}$$

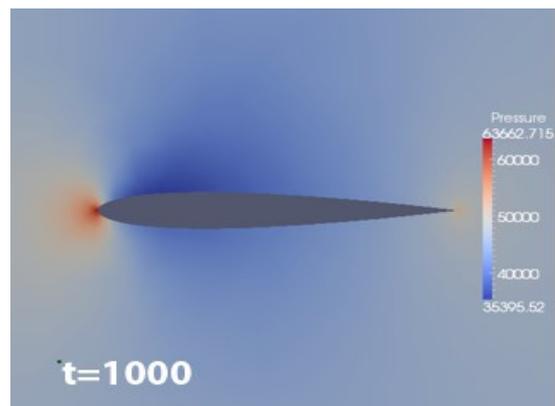
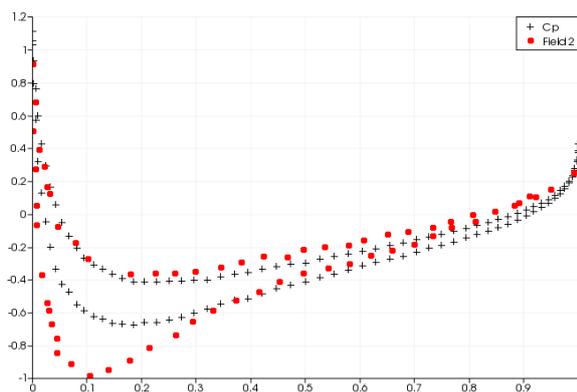


Рис. 1. Распределение коэффициента давления по поверхности профиля (слева; красные маркеры – эксперимент, черные – результаты расчетов) и поле давления вокруг профиля (справа).

Исходя из графика, можно утверждать, что по результатам расчетов предложенный численный метод и разработанный программный код показали хорошее соответствие полученных расчетных результатов с экспериментальными данными. Имеется расхождение экспериментальных и расчетных данных на верхней части профиля, это связано с тем, что в расчетах не учтено влияние турбулентной вязкости.

**Вторая задача** - задача о стационарном сверхзвуковом обтекании клина с числом Маха  $M = 2$ . Производится анализ конфигурации системы скачков уплотнения возникающих при обтекании клина (рис. 2) и многократного отражения начального скачка от стенок канала.

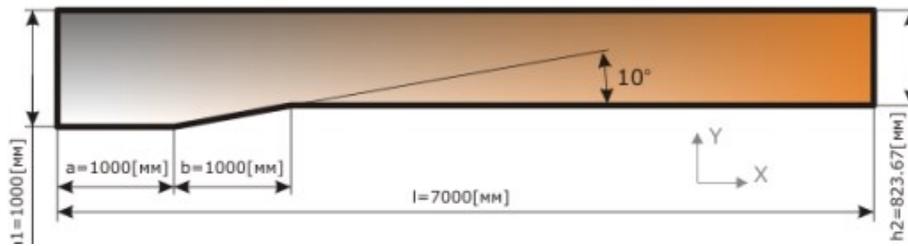


Рис. 2. Эскиз геометрии

Использовалась неструктурированная треугольная сетка [5], модель газа - вязкий газ. На рисунках 3 и 4 представлено распределение полей числа Маха и давления.

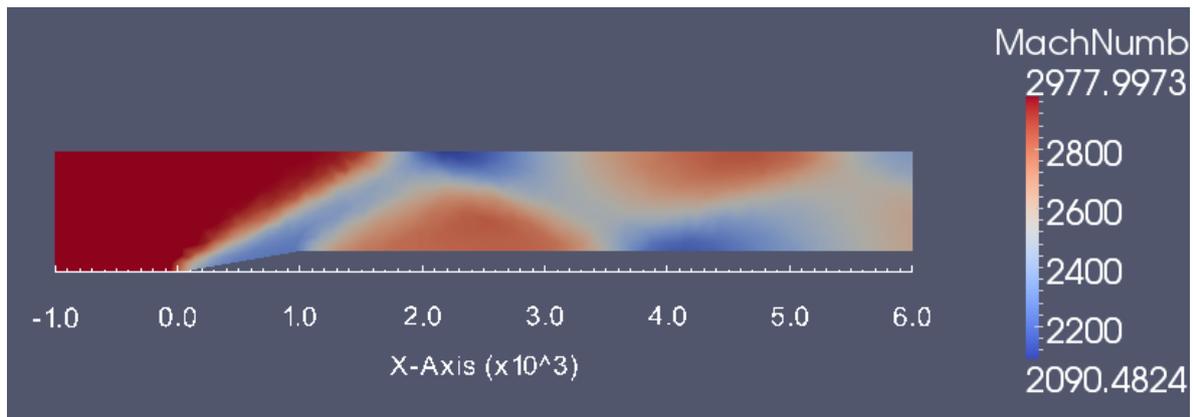


Рис. 3. Поле числа Маха М

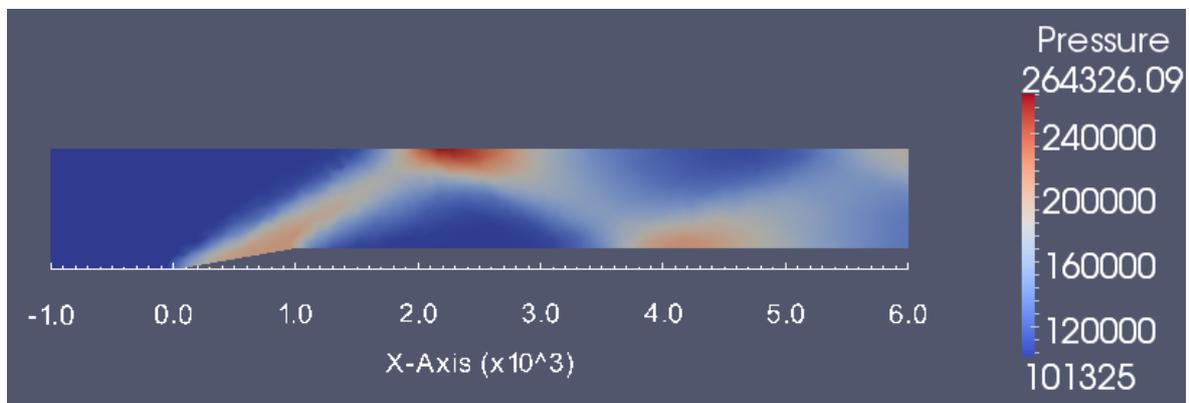


Рис. 4. Поле давления

## ЛИТЕРАТУРА

1. CFD code for 2D simulation gas and fluid flows – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://code.google.com/p/cfd-2d/>
2. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 т. Т. 1 : пер. с англ / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М. : Мир, 1990. – 384 с.

3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
4. Куликовский А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семёнов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.
5. Программа генерации сетки – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>
6. Платформа для визуализации и анализа данных приложения – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://paraview.org/>