

**КЯШКИН А.А.**

**ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Аннотация.** В статье описывается веб-приложение по построению фазовых портретов систем обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости. Для численного решения задачи Коши используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Приведены примеры фазовых портретов.

**Ключевые слова:** фазовый портрет, система обыкновенных дифференциальных уравнений, метод Рунге-Кутты 4-го порядка, задача Коши.

**KYASHKIN A.A.**

**CONSTRUCTION OF PHASE PORTRAITS OF  
ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS**

**Abstract.** The article describes a web application on the construction of phase portraits of ordinary differential equations systems on the plane. The author uses the Runge-Kutta method of 4th order for the Cauchy problem numerical solution. In this connection, the examples of phase portraits are presented.

**Keywords:** phase portrait, ordinary differential equations system, Runge-Kutta method of 4th order, Cauchy problem.

Очень часто в процессе решения задач, возникающих при математическом моделировании многих реальных явлений, приходится узнавать, как поведет себя то или иное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вблизи особых точек. Но поскольку точные решения систем ОДУ могут быть получены лишь для небольшого числа задач, требуется применение приближенных (аналитических и численных) методов решения подобных задач [1, с.347]. Как следствие этого, необходимы программные средства, позволяющие визуализировать фазовые портреты систем ОДУ.

Отметим, что строить фазовые портреты систем ОДУ позволяют почти все существующие математические пакеты: Mathcad, Matlab, Scilab и др. Но во всех случаях для визуализации приходится набирать программный код и вручную строить фазовые траектории, необходимые для создания целостной картины фазовых портретов систем ОДУ, что является весьма трудоемким процессом. Поэтому актуален вопрос об упрощении их построения с помощью создания приложения, облегчающего процедуру создания фазовых портретов. Такое приложение, как правило, должно обладать удобным интерфейсом и некоторыми элементами автоматизации построения фазовых портретов систем ОДУ.

Для построения фазовых портретов будем рассматривать следующую подзадачу – задачу Коши для системы двух ОДУ:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y, z), & y(x_0) = y_0, \\ z'(x) = g(x, y, z), & z(x_0) = z_0. \end{cases} \quad (1)$$

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка в данном случае будет имеет вид [2, с.303]:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h_{i+1}}{6}(K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i}), \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{h_{i+1}}{6}(L_{1,i} + 2L_{2,i} + 2L_{3,i} + L_{4,i}), \end{aligned} \quad (2)$$

для  $i = \overline{0, n-1}$ , где

$$\begin{aligned} K_{1,i} &= f(x_i, y_i, z_i), \\ L_{1,i} &= g(x_i, y_i, z_i), \\ K_{2,i} &= f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_i + \frac{1}{2}h_{i+1}K_{1,i}, z_i + \frac{1}{2}h_{i+1}L_{1,i}\right), \\ L_{2,i} &= g\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_i + \frac{1}{2}h_{i+1}K_{1,i}, z_i + \frac{1}{2}h_{i+1}L_{1,i}\right), \\ K_{3,i} &= f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_i + \frac{1}{2}h_{i+1}K_{2,i}, z_i + \frac{1}{2}h_{i+1}L_{2,i}\right), \\ L_{3,i} &= g\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_i + \frac{1}{2}h_{i+1}K_{2,i}, z_i + \frac{1}{2}h_{i+1}L_{2,i}\right), \\ K_{4,i} &= f(x_i + h_{i+1}, y_i + h_{i+1}K_{3,i}, z_i + h_{i+1}L_{3,i}), \\ L_{4,i} &= g(x_i + h_{i+1}, y_i + h_{i+1}K_{3,i}, z_i + h_{i+1}L_{3,i}). \end{aligned} \quad (3)$$

На основе рассмотренного численного метода (2)-(3) для задачи (1) с помощью средств веб-программирования было написано приложение, позволяющее визуализировать фазовые портреты систем ОДУ. Приведем результаты работы этой программы на нескольких примерах построения фазовых портретов.

Во всех рассмотренных примерах:  $n$  – число точек для построения каждой фазовой траектории,  $a$  и  $b$  – границы отрезка  $[a, b]$  по оси  $Ox$ ,  $c$  и  $d$  – границы отрезка  $[c, d]$  по оси  $Oy$ ,  $t_0$  и  $t_1$  – начальный и конечный промежутки по времени.

*Пример 1.*

$$\begin{cases} \dot{x} = -1.4 \cdot x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Фазовый портрет является устойчивым узлом. Выберем следующие значения:  $n = 300$ ,  $a = -8$ ,  $b = 8$ ,  $c = -8$ ,  $d = 8$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 10$ . Результат работы программы представлен на рисунке 1.

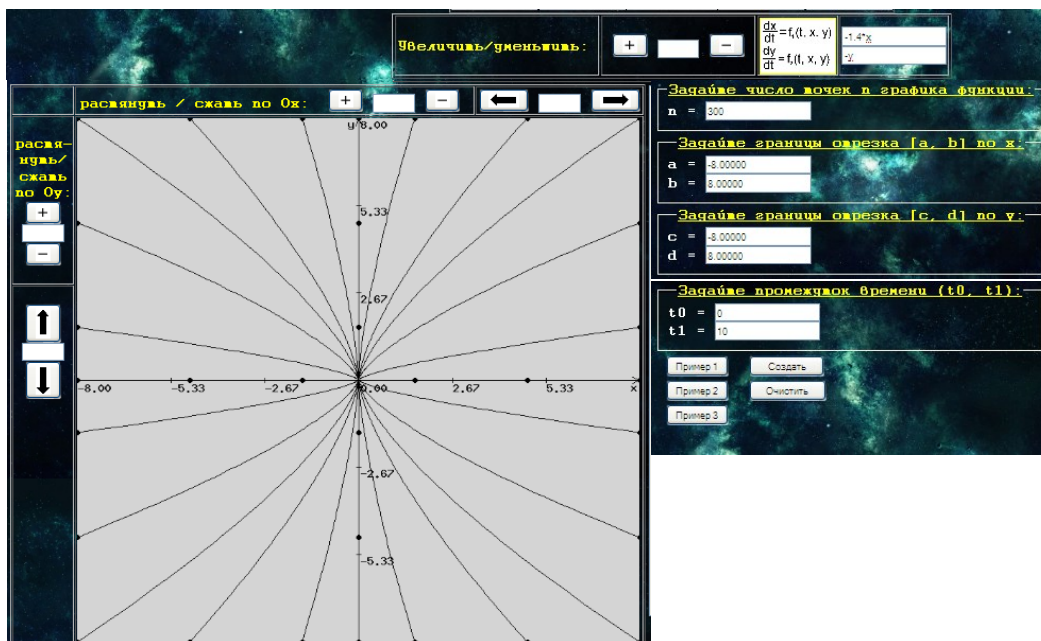


Рис. 1. Устойчивый узел

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = 1.4 \cdot x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Фазовый портрет является седлом. Выберем следующие значения:  $n=300$ ,  $a=-16$ ,  $b=16$ ,  $c=-16$ ,  $d=16$ ,  $t_0=0$ ,  $t_1=10$ . Результат работы программы представлен на рисунке 2.

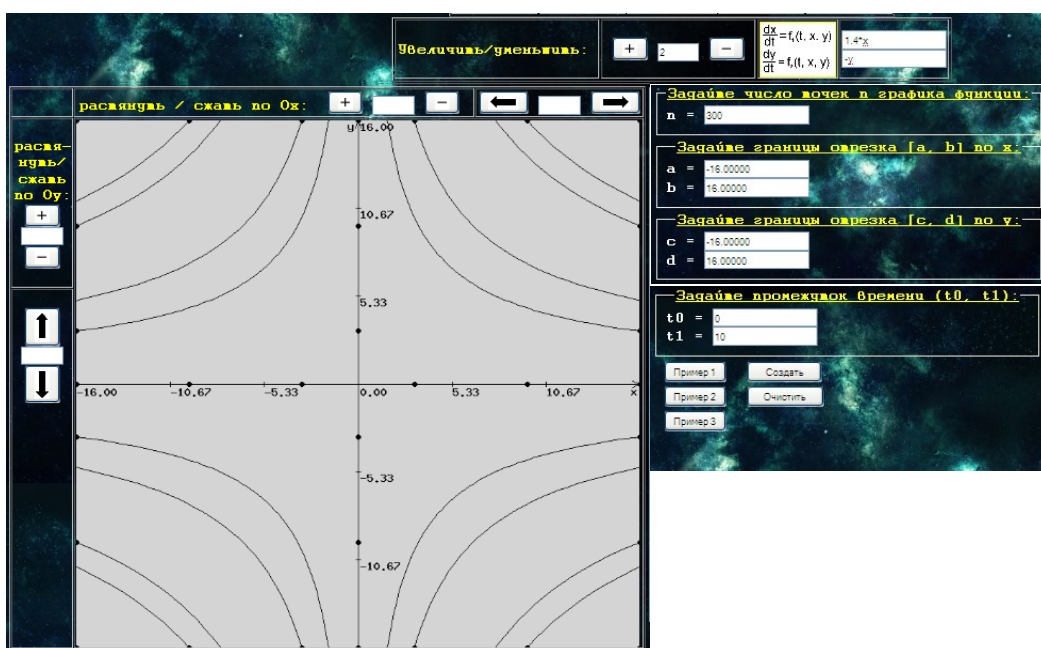


Рис. 2. Седло

Пример 3.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Фазовый портрет является устойчивым фокусом. Выберем следующие значения:  $n = 300$ ,  $a = -8$ ,  $b = 8$ ,  $c = -8$ ,  $d = 8$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 10$ . Результат работы программы представлен на рисунке 3.

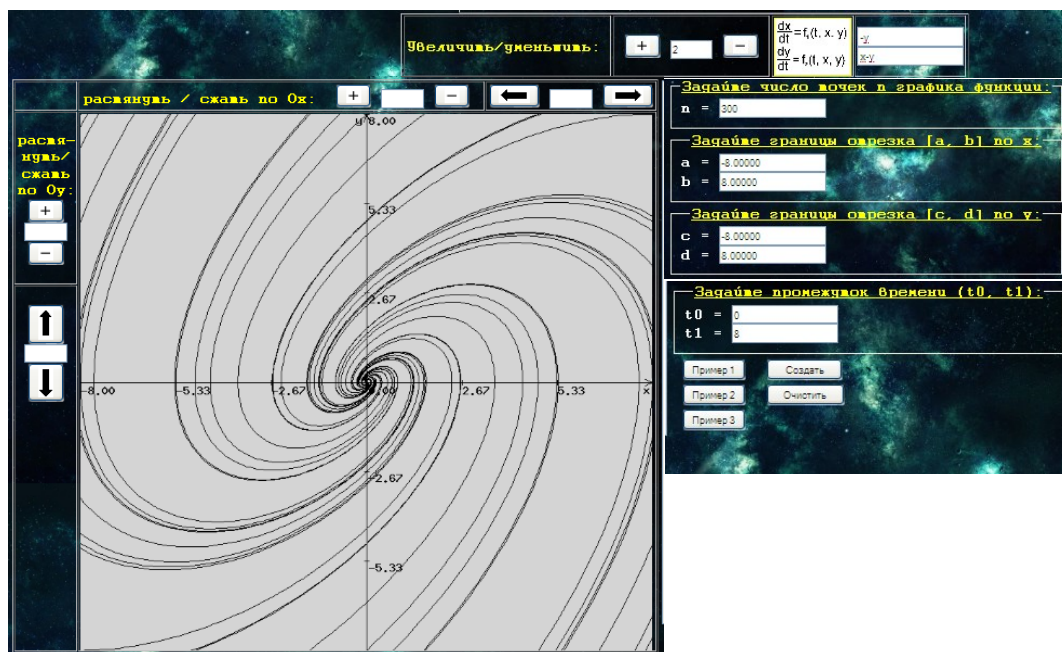


Рис. 3. Устойчивый фокус

Пример 4.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Фазовый портрет является центром. Выберем следующие значения:  $n = 200$ ,  $a = -8$ ,  $b = 8$ ,  $c = -8$ ,  $d = 8$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 10$ . Результат работы программы представлен на рисунке 4.

На рисунках 1-4 видно, что приложение верно строит фазовые портреты для всех примеров приведенных систем ОДУ. При этом фазовые траектории строятся автоматически, и нет необходимости вручную задавать начальные значения для решений задач Коши.

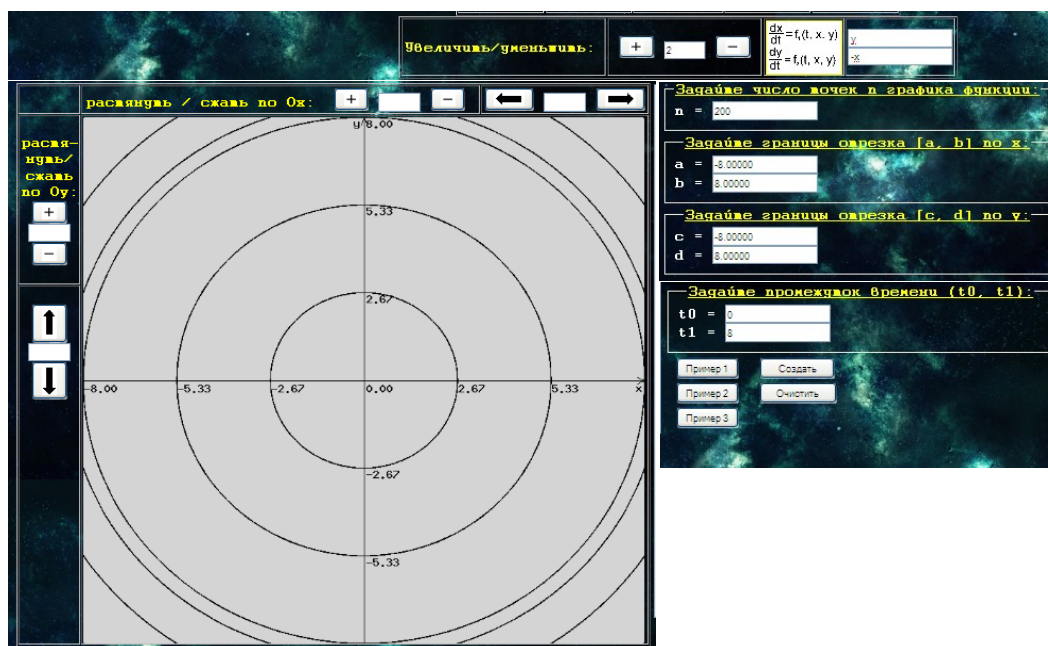


Рис. 4. Центр

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чичкарёв Е. А. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов. – М.: ALT Linux, 2012. – 384 с.
2. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие / 2-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.