

**КЯШКИН А.А., ШАМАНАЕВ П.А.**

**ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
КОНСЕРВАТИВНОГО АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ**

**Аннотация.** В статье приводится визуализация решений первой краевой задачи для консервативного автономного уравнения Дуффинга методом нахождения решения в виде ряда, методами стрельбы и квазилинеаризации. На основе полученных результатов делается вывод о найденных приближенных аналитических решениях.

**Ключевые слова:** визуализация решений, консервативное автономное уравнение Дуффинга, первая краевая задача, решение в виде ряда, метод стрельбы, метод квазилинеаризации.

**KYASHKIN A.A., SHAMANAEV P.A.**

**VISUALIZATION OF FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM SOLUTIONS FOR  
CONSERVATIVE AUTONOMOUS DUFFING EQUATION BY USING METHODS OF  
RAMIFICATION THEORY**

**Abstract.** The article provides a visualization of the first boundary value problem solutions for the conservative autonomous Duffing equation by using the method of series solution, the shooting method, and quasilinearization. Considering the study results, it is draw a conclusion about the approximate analytical solutions.

**Keywords:** solutions visualization, conservative autonomous Duffing equation, first boundary value problem, series solution, shooting method, quasilinearization method.

Как правило, для описания физических процессов в теории колебаний применяются математические модели. Осциллятор Дуффинга или осциллятор с кубической нелинейностью является одной из наиболее распространенных моделей теории колебаний. Он рассматривается во многих работах, например, в [2] и [4]. Уравнение осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0.$$

Его можно получить, если рассматривать колебания математического маятника при небольших углах отклонения, колебания груза на пружине с нелинейной возвращающей силой, расположенной на плоской горизонтальной поверхности. Данное уравнение также можно получить при описании движения частицы в потенциале из двух ям [1, с.6].

В связи с невозможностью отыскания точного аналитического решения уравнения Дуффинга стоит вопрос об отыскании приближенных аналитических решений и численных

решений данного уравнения. В связи с этим задача, рассматриваемая в данной статье, является актуальной.

Рассмотрим модель, описывающую консервативный автономный осциллятор Дуффинга [1, с.19], называемый также идеальным осциллятором:

$$\ddot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0.$$

Произведя замену переменных  $x \leftrightarrow y$ ,  $t \leftrightarrow x$  и выбрав следующие значения параметров:  $\beta = \varepsilon + 1$ ,  $\gamma = -1$  (где  $\varepsilon$  – малый параметр), будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения Дуффинга:

$$y'' + y = -\varepsilon y + y^3, \quad -\pi < x < \pi, \quad \varepsilon \in \mathfrak{R}; \quad (1)$$

$$y(-\pi) = 1/2, \quad x = -\pi; \quad y(\pi) = 1/2, \quad x = \pi, \quad (2)$$

которая получается из краевой задачи, исследовавшейся в статье [3], с помощью фиксирования краевых условий:  $y(-\pi) = y(\pi) = 1/2$ .

В целях данной статьи были исследованы решения краевой задачи (1)-(2), в результате чего была получена зависимость числа различных решений  $y \in \mathfrak{R}$  от параметра  $\varepsilon$ , приведенная в таблице 1.

Таблица 1. Зависимость числа приближенных решений  $y \in \mathfrak{R}$  от параметра  $\varepsilon \in \mathfrak{R}$ , где  $\varepsilon_1 \approx 0,11439$ ,  $\varepsilon_2 \approx 0,24937$ ,  $\varepsilon_3 \approx 0,24943$ .

Число различных решений $y \in \mathfrak{R}$	0	3	2	5	4	7	6
$\varepsilon$	$[0, \varepsilon_1)$	$\{\varepsilon_1\}$	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$	$\{\varepsilon_2\}$	$(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$	$\{\varepsilon_3\}$	$(\varepsilon_3, 1/4)$

Приведем графики найденных приближенных аналитических решений краевой задачи (1)-(2) при выбранных значениях  $\varepsilon$ :  $\varepsilon_1 \approx 0,11439$ ,  $\varepsilon_2 \approx 0,24937$ ,  $\varepsilon_3 \approx 0,24943$  методами нахождения решения в виде ряда с коэффициентами до 4-го порядка, стрельбы (см. [6, с.180]) с использованием метода Нюрстрёма 5-го порядка [7, с.278] и квазилинеаризации (см. [5, с.260]) с шагом  $h = 0,001$  и точностью  $toch = 0,01$ .

1. При  $\varepsilon = \varepsilon_1 \approx 0,11439$  получаем 3 решения (см. таблицу 1):

$$y_{1,2}(x, \varepsilon_1) \approx \mp 0,0001 \sin(3x) + 0,0027 \cos(3x) \pm 0,0044 \sin(x) - 0,5027 \cos(x), \quad (3)$$

$$y_3(x, \varepsilon_1) \approx 0,0027 \cos(3x) - 0,5027 \cos(x). \quad (4)$$

*Замечание.* Знаки «+/-» для решений (3) для  $y_1$  выбираются верхние, для  $y_2$  – нижние. Для других подобных случаев знаки выбираются тем же образом.

Визуализация приближенных решений выбранными методами при заданном  $\varepsilon_1 \approx 0,11439$  имеет вид, указанный на рисунке 1.

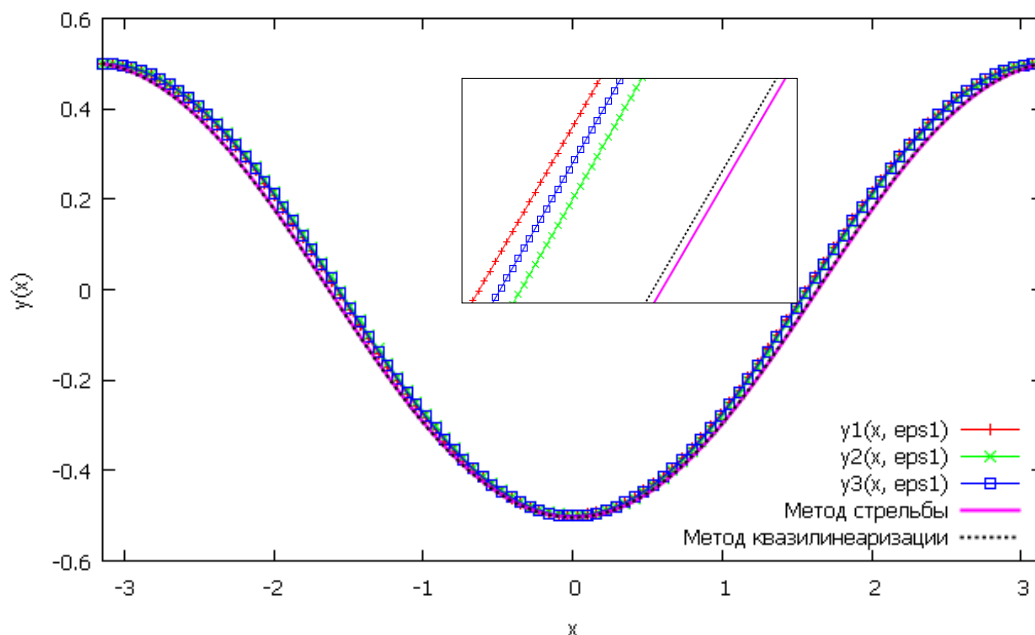


Рис. 1. Визуализация приближенных решений задачи (1)-(2) при выбранном  $\varepsilon_1 \approx 0,11439$  методом нахождения решения в виде ряда (решения (3)-(4)); методами стрельбы и квазилинеаризации с шагом  $h = 0,001$  и точностью  $toch = 0,01$ .

2. При  $\varepsilon = \varepsilon_2 \approx 0,24937$  получаем 5 решений:

$$y_{1,2}(x, \varepsilon_2) \approx \mp 0,5566 \sin(3x) + 9,8789 \cos(3x) \pm 0,1947 \sin(x) - 10,3789 \cos(x), \quad (5)$$

$$y_{3,4}(x, \varepsilon_2) \approx \pm 9,8876 \sin(3x) - 0,3704 \cos(3x) \pm 10,3799 \sin(x) - 0,1296 \cos(x), \quad (6)$$

$$y_5(x, \varepsilon_2) \approx 9,8945 \cos(3x) - 10,3807 \cos(x). \quad (7)$$

Визуализация приближенных решений выбранными методами при заданном  $\varepsilon_2 \approx 0,24937$  имеет вид, указанный на рисунке 2.

3. При  $\varepsilon = \varepsilon_3 \approx 0,24943$  получаем 7 решений:

$$y_{1,2}(x, \varepsilon_3) \approx \mp 4,9862 \sin(3x) + 10,265 \cos(3x) \pm 1,635 \sin(x) - 10,765 \cos(x), \quad (8)$$

$$y_{3,4}(x, \varepsilon_3) \approx \pm 11,4056 \sin(3x) - 0,3793 \cos(3x) \pm 10,8877 \sin(x) - 0,1207 \cos(x), \quad (9)$$

$$y_{5,6}(x, \varepsilon_3) \approx \mp 0,7742 \sin(3x) - 11,3856 \cos(3x) \pm 0,2464 \sin(x) + 10,8856 \cos(x), \quad (10)$$

$$y_7(x, \varepsilon_3) \approx 10,8884 \cos(x) - 11,4119 \cos(3x). \quad (11)$$

Визуализация приближенных решений выбранными методами при заданном  $\varepsilon_3 \approx 0,24943$  имеет вид, указанный на рисунке 3.

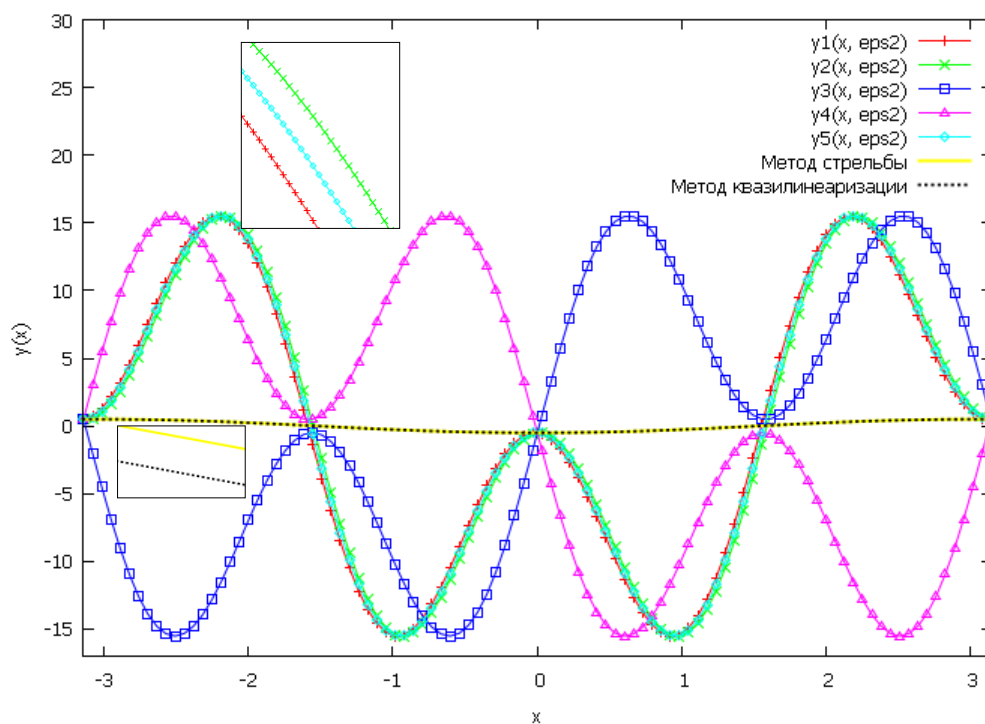


Рис. 2. Визуализация приближенных решений задачи (1)-(2) при выбранном  $\varepsilon_2 \approx 0,24937$  методом нахождения решения в виде ряда (решения (5)-(7)); методами стрельбы и квазилинеаризации с шагом  $h = 0,001$  и точностью  $toch = 0,01$ .

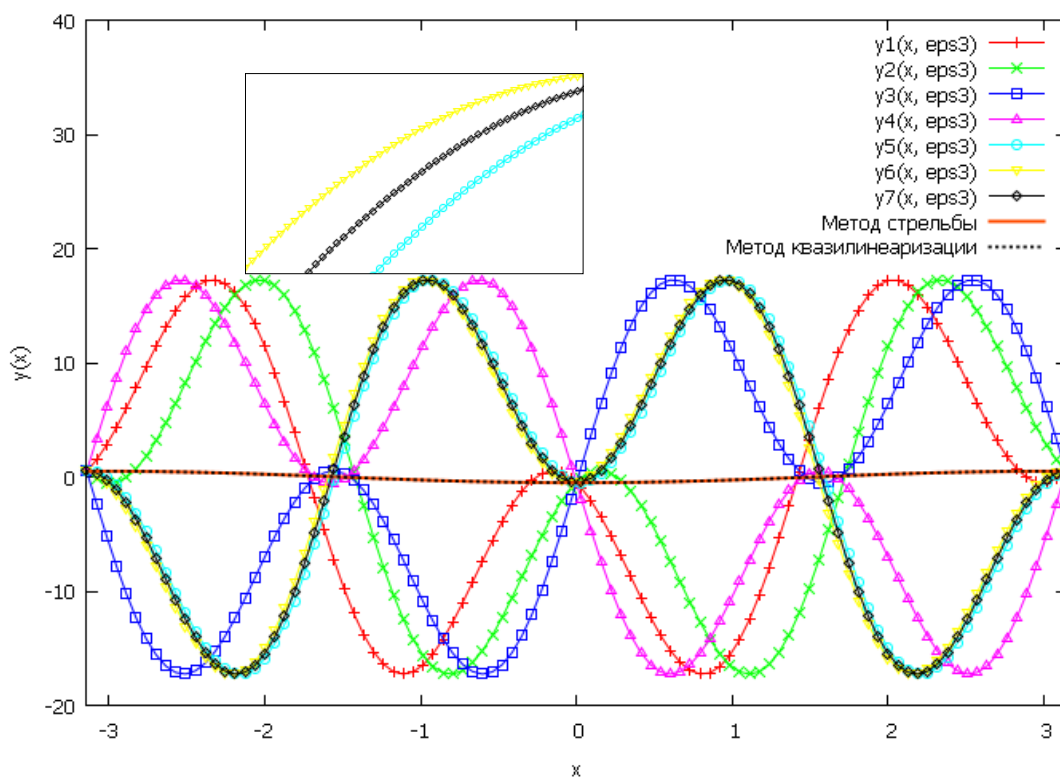


Рис. 3. Визуализация приближенных решений задачи (1)-(2) при выбранном  $\varepsilon_3 \approx 0,24943$  методом нахождения решения в виде ряда (решения (8)-(11)); методами стрельбы и квазилинеаризации с шагом  $h = 0,001$  и точностью  $toch = 0,01$ .

В целях данной статьи были исследованы графики полученных приближенных решений, и было установлено, что при  $\varepsilon$ , близких к  $\varepsilon_1$ , приближенное аналитическое решение методом разложения в ряд (при коэффициентах до 4-го порядка) будет близко к численным решениям, полученным методами стрельбы и квазилинеаризации. При  $\varepsilon$ , приближающихся к  $\varepsilon_2$  и более, видно, что выбранного числа членов ряда явно недостаточно для корректного приближения аналитического решения. Это также видно на рисунках 1-3 при выбранных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Астахов В.В., Коблянский С.А., Шабунин А.В. Осциллятор Дуффинга: Учебное пособие для студентов вузов. – Саратов: СГУ, 2007. – 53 с.
2. Бурд В.Ш. К вопросу о сопряженных резонансах. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=170>
3. Кяшкин А.А., Шаманаев П.А. Нахождение малых решений дифференциального уравнения 2-го порядка с помощью построения уравнения разветвления // Актуальные вопросы прикладной математики: сб. науч. тр. – Саранск: СВМО, 2013. – С.20-24.
3. Манучарян Г.В. Взаимная неустойчивость фазовых траекторий и хаотическое поведение нелинейных механических систем // ФП ФИП PSE. – 2003. – Т. 1, № 3–4. – С. 347-351.
4. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. – М.: Интернет-Университет Информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.
5. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, – 2004. – 400 с.
6. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Пер. с англ. – М.: Мир, – 1990. – 512 с.